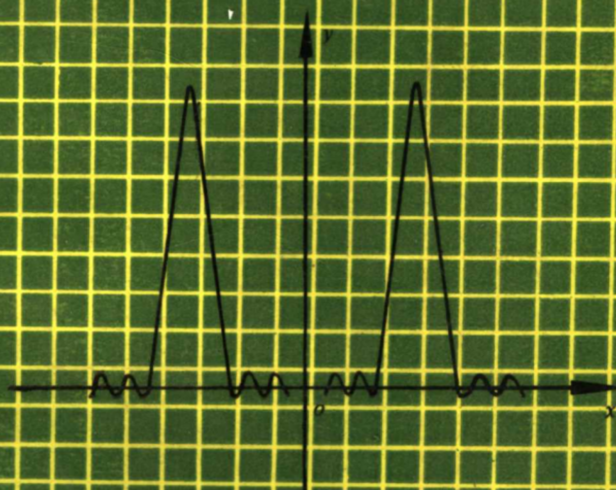
δ-函数及其应用

赵为礼 张 卿 杨有发 编著



吉林科学技术出版社

δ-函数及其应用

赵为礼　张　卿　杨有发　编著

吉林科学技术出版社

内容提要

本书较系统地论述了 δ-函数的数学理论和在各科技领域内的广泛应用. 全书共八章，其中前四章侧重阐述 δ-函数的数学理论及其在“积分变换”、“数学物理方程”等有关数学方面的应用；后四章着重介绍 δ-函数在“随机信号分析”、“系统工程”、“数据处理”、“量子力学”、“经典物理”、“光学衍射”、“振动理论”、“地球物理勘探”、“水文地质”、“地震预报”等科技领域内的种种应用.

该书可作为理工科大、专院校高年级学生、研究生和教师的教学参考书. 对于从事应用科学的研究人员以及各科技领域内的工程技术人员来说，也是一本较好的工具书

δ-函数及其应用　　赵为礼　张　卿　杨有发　编

责任编辑：王维义　　封面设计：张沭沉

出版发行　吉林科学技术出版社　850×1168 毫米 32 开本　12,125 印张

插页 4　328,000 字

1992 年 6 月第 1 版　1992 年 6 月第 1 次印刷

制版　中海直公司长春科研所　印数：1－1200 册　定价：7.80 元

印刷　东北师范大学印刷厂

ISBN 7-5384-0977-7/O.48

前　言

要想把 δ-函数的理论弄清楚，就必须学习和阅读许多抽象和繁难的泛函分析、广义函数的理论．然而，多数非数学专业的科技人员，又难以有精力和时间作到这一点，对从事电讯、电子电路理论、线性系统分析理论、振动理论、量子力学、天线理论、信息分析等科学研究人员，以及许多工程技术人员也难以掌握应用 δ-函数这一重要的数学工具．同时，在国内外浩翰的书海之中，还没见到有对 δ-函数的理论加以系统地论述并给出其广泛应用的书，在这种形势下，写出一本具有既能尽量不涉及或少涉及抽象的数学理论，又能较为系统、直观地阐述 δ-函数的理论和应用的书，使广大非数学专业的科技人员能很好地掌握和应用 δ-函数这个数学工具便是编著者写作的立意．

为了更好地实现这一宿愿，我们在写作过程中，力求做到以下几点：

1. 对 δ-函数的数学理论进行较为深入系统的论述．不仅通过具体实例深入浅出地引进 δ-函数的概念，详细地阐述了它的物理背景和几何意义；而且推导论证了 δ-函数的全部性质，并对与 δ-函数有关的一些基本概念及其数学理论，也进行了较为深入的讨论．

2. 我们不仅讨论了 δ-函数在一些数学领域内的应用，而且，尽量将 δ-函数在某些重要科技领域（如数据处理、振动理论、经典场论、量子力学、地球物理勘探、水文地质、电路通讯等方面）的实际应用汇集起来，使得从事研究和应用 δ-函数的有关人员，尽量开阔视野，掌握全貌，读后确有较大收获．

3. 全书力求由浅入深、循序渐进、通俗易懂，即使在用到较高深

的数学理论，如广义函数和泛函分析时，我们也恪守这一原则，因此，只要读者具有高等数学的知识水平，就可以读懂本书的基本内容. 本书为了说明 δ-函数在经典场论、近代物理等方面的应用，不得不涉及到数学物理方程和量子力学中的一些内容，然而，读者只要参看书后所列的有关参考文献，也不难读懂.

在内容安排上，本书第一章是全书的基础，我们系统地阐述了 δ-函数的数学理论，最后又浅显、简捷地借助于广义函数理论，奠定了 δ-函数的理论基础. 第二、三、四各章讨论了 δ-函数在数学上的某些应用. 其中包括积分变换、数学物理方程中与 δ-函数关系极为密切的重要方法. 因此，本书也可作为理工科院校高年级学生和研究生，学习数学物理方程和应用数学课的重要参考书. 本书后四章主要研究了 δ-函数在数字信号处理、振动理论、地球物理勘探及其他一些科技领域中的应用.

本书共八章，第一、二、四章，由吉林大学数学系赵为礼副教授撰写；第三、五、六、八章由长春地质学院数学教研室张　卿副教授撰写；第七章由长春地质学院应用地球物理系杨有发副教授撰写. 全书由张卿编审和校订.

我们在写作过程中，曾得到长春地质学院应用地球物理系何樵登教授、基础科学系数学教研室杨天行教授的热情鼓励和帮助，吉林大学数学系欧维义教授，也给予大力支持，在此一并致谢.

虽然编著者为了写本书，曾博览了大量的资料和书籍，经过了长期的准备，作了大量的推导论证，数易其稿，试图别开生面，力求写出特色，但是，δ-函数毕竟是非常抽象的非普通函数，涉及的专门知识较多，不妥之处，甚至是错误在所难免，殷切期望读者不吝指正.

编　著　者

1990 年 10 月于长春

目　录

第一章　δ-函数 ……………………………………………… (1)

§1.1　δ-函数的定义 ……………………………………… (1)

§1.2　弱收敛 ………………………………………………… (5)

1.2.1　弱收敛的定义 ……………………………………… (5)

1.2.2　把 δ-函数看作普通函数的弱极限……………… (6)

1.2.3　磨光算子 …………………………………………… (14)

§1.3　δ-函数的几何意义与物理意义 ……………………… (21)

1.3.1　几何意义 …………………………………………… (21)

1.3.2　物理意义 …………………………………………… (22)

§1.4　间断函数的导数 ……………………………………… (25)

1.4.1　弱相等的概念 ……………………………………… (25)

1.4.2　间断函数的导数……………………………………… (26)

§1.5　δ-函数的性质 ………………………………………… (32)

§1.6　高维 δ-函数 …………………………………………… (40)

1.6.1　高维 δ-函数的定义 …………………………………… (41)

1.6.2　高维 δ-函数的性质 …………………………………… (43)

1.6.3　高维 δ-函数的几何意义与物理意义 ………………… (55)

1.6.4　n 维磨光算子 ………………………………………… (59)

§1.7　δ-函数的数学理论简介 ……………………………… (61)

1.7.1　有关泛函的一些基本概念 ………………………… (62)

1.7.2　δ-函数与广义函数的定义 …………………………… (66)

1.7.3　广义函数的基本运算 ……………………………… (70)

第二章　杜哈美(Duhamal)原理 ………………………………… (79)

§2.1　迭加原理 ……………………………………………… (79)

§2.2　一些简例的启示 ……………………………………… (82)

§2.3　杜哈美(Duhamal)原理………………………………… (88)

2.3.1 杜哈美(Duhamal)原理及其证明 …………………… (88)
2.3.2 杜哈美(Duhamal)原理的实质、意义及其适用范围 ……… (90)
§2.4 杜哈美(Duhamal)原理的物理意义 ………………… (92)
§2.5 杜哈美(Duhamal)原理的应用举例 ………………… (97)
§2.6 杜哈美(Duhamal)原理的另一种形式 ……………… (101)
第三章 积分变换 ……………………………………………… (106)
§3.1 傅氏变换 …………………………………………… (107)
3.1.1 傅氏变换的定义 …………………………………… (107)
3.1.2 傅氏变换的性质 …………………………………… (109)
3.1.3 多元函数的傅氏变换 ……………………………… (121)
3.1.4 傅氏变换法的应用举例 …………………………… (127)
§3.2 拉氏变换 …………………………………………… (134)
3.2.1 拉氏变换的概念 …………………………………… (134)
3.2.2 拉氏变换存在定理 ………………………………… (136)
3.2.3 拉氏变换的性质 …………………………………… (140)
3.2.4 拉氏逆变换的求法 ………………………………… (148)
3.2.5 多元函数的拉氏变换 ……………………………… (154)
3.2.6 拉氏变换法的应用举例 …………………………… (156)
第四章 解数学物理方程的格林(Green)函数法 ……………… (167)
§4.1 初值问题的 Green 函数与 Green 函数法 ………… (168)
4.1.1 热传导方程初值问题的 Green 函数与 Green 函数法 …… (168)
4.1.2 波动方程初值问题的 Green 函数与 Green 函数法 ……… (179)
4.1.3 Green 函数概念的进一步引伸 ……………………… (194)
§4.2 位势方程定解问题的 Green 函数与 Green
函数法 ……………………………………………… (207)
4.2.1 三维位势方程定解问题的 Green 函数法 ………… (207)
4.2.2 二维位势方程定解问题的 Green 函数法 ………… (230)
§4.3 混合问题的 Green 函数与 Green 函数法 ………… (238)
第五章 δ-函数在数字信号处理中的应用 …………………… (259)
§5.1 数字信号处理简介 ………………………………… (259)

§5.2 任意离散信号均可表示为δ-函数的加权和 ……… (261)

5.2.1 单位脉冲序列的概念 ……… (261)

5.2.2 任意序列均可表示为脉冲序列的加权和 ……… (262)

5.2.3 线性时不变系统和离散褶积 ……… (262)

§5.3 等间隔脉冲序列的谱仍是脉冲序列 ……… (265)

5.3.1 抽样序列的频谱 ……… (266)

5.3.2 连续谱与离散谱之间的关系 ……… (268)

5.3.3 抽样定理 ……… (269)

5.3.4 离散傅氏变换(DFT) ……… (272)

5.3.5 离散傅氏逆变换 ……… (274)

5.3.6 离散傅氏变换的性质 ……… (278)

5.3.7 快速傅氏变换(FFT)简介 ……… (280)

5.3.8 δ－函数在$\mathscr{Z}$变换中的应用 ……… (284)

§5.4 希尔伯特(Hilbert)变换 ……… (292)

5.4.1 实连续信号的希尔伯特变换 ……… (294)

5.4.2 实离散信号的希尔伯特变换 ……… (297)

5.4.3 $\mathscr{Z}$变换谱的希尔伯特变换 ……… (301)

5.4.4 周期序列傅氏谱的希尔伯特变换 ……… (301)

第六章 δ-函数在振动理论中的应用 ……… (304)

§6.1 线性系统 ……… (304)

6.1.1 线性方程的经典解法 ……… (306)

6.1.2 脉冲响应法 ……… (308)

6.1.3 频率响应法 ……… (310)

§6.2 用δ-函数表示系统所受的力 ……… (313)

§6.3 持续力表示为瞬时力的迭加 ……… (319)

第七章 δ-函数在地球物理勘探中的应用 ……… (327)

§7.1 应用δ-函数描述地震源的脉冲波 ……… (327)

§7.2 地震波波动理论的讨论 ……… (329)

7.2.1 标量介质——时间简谐震源情况下二维波动理论讨论中δ-函数的应用 ……… (329)

7.2.2 标量介质——脉冲震源情况下 δ-函数的应用 …………（330）
7.2.3 弹性介质——线力情况下 δ-函数的应用 …………（331）
7.2.4 基尔霍夫方程的积分解 …………（333）
§7.3 δ-函数在地球物理正演模拟问题中的应用 …………（336）
§7.4 地球物理反演问题中 δ-函数的应用 …………（337）
7.4.1 一维声波方程的波恩(Born)反演 …………（338）
7.4.2 三维声波方程的波恩(Born)反演 …………（339）
7.4.3 基尔霍夫积分偏移与频率-波数域偏移法(F-K)等价性的证明 …………（341）
7.4.4 拉冬(Rodon)变换 …………（342）
§7.5 δ-函数在地球物理勘探数据处理中的应用 …………（343）
7.5.1 系统特性的描述 …………（343）
7.5.2 数字滤波褶积公式的证明 …………（344）
7.5.3 δ-函数在脉冲反褶积中的应用 …………（345）
7.5.4 提高信号信噪比的处理方法 …………（346）
7.5.5 信号采样过程的数学描述 …………（350）
7.5.6 求取地层反吸收因子的方法 …………（353）
7.5.7 地震子波的整形处理方法 …………（353）
第八章 δ-函数的其他应用 …………（356）
§8.1 电动力学的基本方程和辐射能量的计算公式 …………（356）
8.1.1 电动力学的基本方程 …………（356）
8.1.2 电子的辐射能量 …………（359）
§8.2 富克尔-普朗克(Fokker-Planck)方程 …………（362）
§8.3 地下水非稳定流中群孔同时抽水的干扰井的计算公式 …………（366）
§8.4 δ-函数在光学衍射中的应用 …………（368）
§8.5 量子力学中粒子动量的平均值 …………（372）
参考文献 …………（376）

第一章　δ-函数

由于许多物理现象，具有脉冲性质，人们才提出并研究了 δ-函数．一般人初次接触 δ-函数这一概念时，都会有不可思议之感；可是，在比较系统而深入地讨论了 δ-函数的理论之后，也就会觉得顺理成章了．

本章主要是通过具体实例，由浅入深地引出了 δ-函数的概念，指出了 δ-函数的几何意义及其物理背景，论证了 δ-函数的性质，并把一维 δ-函数的有关结论，推广到高维的情形．最后藉助于广义函数理论，初步奠定了 δ-函数的数学基础．

§1.1　δ-函数的定义

δ-函数是一类物理背景十分明显，应用相当广泛，而又有别于普通函数的函数．狄拉克(Dirac)曾称之为“非正常函数”．为了比较自然地引进 δ-函数，以便读者不仅能从形式上接受，而且能正确理解这个非常重要的概念，我们首先看两个浅显的实例．

例 1.1　设在 x 轴上除点 $x=0$ 以外的其它各点处，都没有电荷分布，而于点 $x=0$ 处，集中分布一单位电荷，试确定 x 轴上各点的电荷分布密度 $\rho(x)$.

解　设$[a,b]$为 x 轴上某区间，$Q[a,b]$表示展布于$[a,b]$上的电荷总量．若令 $\Delta=b-a$，则易见

$$\rho(0)=\lim_{\substack{\Delta\to 0\\ 0\in[a,b]}}\frac{Q[a,b]}{\Delta}=\lim_{\substack{\Delta\to 0\\ 0\in[a,b]}}\frac{1}{\Delta}=\infty^{*}$$

当 $x\neq 0$ 时，

---

* $x\in[a,b]$ 表示点 x 属于区间$[a,b]$；而 $x\notin[a,b]$ 表示点 x 不属于区间$[a,b]$.

$$\rho(x) = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ x \in [a,b] \\ 0 \in [a,b]}} \frac{Q[a,b]}{\Delta} \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ x \in [a,b] \\ 0 \in [a,b]}} \frac{0}{\Delta} = 0$$

亦即 x 轴上各点的电荷分布密度函数为

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时} \\ \infty & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{1-1}$$

此外,不难看出,还有

$$Q(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1 \tag{1-2}$$

例 1.2　设在 x 轴上除点 $x=\xi$ 外的其它各点处,都没有物质分布,而于点 $x=\xi$ 处集中分布一单位质量的物质．试确定 x 轴上各点处的物质分布密度 $\mu(x)$.

解　设$[a,b]$为 x 轴上某区间,$m[a,b]$表示展布于$[a,b]$上的物质的总质量．若令 $\Delta=b-a$,则易见

$$\mu(\xi) = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ \xi \in [a,b]}} \frac{m[a,b]}{\Delta} = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ \xi \in [a,b]}} \frac{1}{\Delta} = \infty$$

当 $x \neq \xi$ 时

$$\mu(x) = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ x \in [a,b] \\ \xi \in [a,b]}} \frac{m[a,b]}{\Delta} = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ x \in [a,b] \\ \xi \in [a,b]}} \frac{0}{\Delta} = 0$$

亦即,x 轴上各点的物质分布密度函数为

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \neq \xi \text{ 时} \\ \infty & \text{当 } x = \xi \text{ 时} \end{cases} \tag{1-3}$$

此外,还不难看出

$$m(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x) dx = 1 \tag{1-4}$$

仔细观察例 1.1 和例 1.2,便不难发现它们有一个明显的共性——都反映了集中分布的物理量的物理特性．显然类似的例子不胜枚举．δ-函数则正是将诸如以例 1.1、例 1.2 为物理背景的函数 $\rho(x)$、$\mu(x)$加以抽象概括而引入数学园地中来,并反过来作为一个强有力的数学工具被广为应用．

综上所述,便容易理解如下定义:

定义 1.1 我们称一个函数为 δ-函数，并记之为 $\delta(x)$，如果它满足

$$1^\circ \quad \delta(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时}\\ \infty & \text{当 } x=0 \text{ 时}\end{cases}$$

$$2^\circ \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$$

只需作一个平移变换，便可得到与定义 1.1 等价的定义：

定义 1.2 我们称一个函数为 δ-函数，并记之为 $\delta(x-\xi)$，如果它满足

$$1^\circ \quad \delta(x-\xi)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\neq \xi \text{ 时}\\ \infty & \text{当 } x=\xi \text{ 时}\end{cases}$$

$$2^\circ \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)dx=1$$

运用简单的推理，便不难得到与上述两个定义等价的，由狄拉克(Dirac)最早提出的定义：

定义 1.3 我们称一个函数为 δ-函数，并记之为 $\delta(x)$，如果它满足

$$1^\circ \quad \delta(x)=0 \quad \text{当 } x\neq 0 \text{ 时}$$

$$2^\circ \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$$

从上述定义可见，δ-函数已经不再是古典分析中所论述的函数了．因为在古典分析中，所谓无穷大(即∞)乃是“无限制变大”的意思，而任何一个普通函数，都不会在其定义域内的某一点处等于∞. 在实变函数论中倒是允许函数在其定义域内某些点处等于∞，然而，δ-函数依然不是实变函数论中所涉及的函数．事实上，若把 δ-函数视为实变函数论中所涉及的函数，则根据实变函数论中的一个广为人知的结果：一个函数在零测度集合上的函数值(无论为有限，还是无限)都不会影响该函数的勒贝格(Lebesgue)积分值，就应该有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=0$$

这显然与 δ-函数的定义相悖．

这说明 δ-函数不能按“逐点对应”的普通函数来理解．正因为如此，自从 1926 年 Dirac 在量子力学的研究中引进了 δ-函数之后，就不断遭到维护所谓正统数学观念的纯粹数学家们的激烈反对．然而，随着 δ-函数在物理及工程技术方面的广泛应用，日益显示了这一巧妙的数学工具的强劲的生命力．因此，面对鼓噪和非难，非但没有把 δ-函数否定掉，反倒唤起一些颇有胆识的数学家致力于奠定 δ-函数严格的数学基础，并逐步创立了一个崭新的数学分支——广义函数论．

广义函数论的形成，虽然使得 δ-函数这个令人费解的“怪”函数，有了牢靠的理论根基，但是，也使原来虽然粗糙，却是简明而有启发性的论述，被既冗长又艰涩的逻辑推理所替代．因此，δ-函数原有的鲜明的直观意义与生动的物理背景便也随之黯然失色了；而且，由于广义函数论的内容较为艰深，也常常使得非专门从事数学工作的人们感到深奥莫测．

为了使本书具有更加广泛的适应性，除了另辟一节，对 δ-函数的数学理论略作启示性介绍外，我们尽量避免涉及广义函数论的知识，以便具备高等数学基础知识的读者，稍加努力就能掌握本章所涉及的基本内容．而且，这样做的结果，也将更加突出 δ-函数的直观意义和物理背景，从而，还 δ-函数以本来面目．不过，这样一来，关于 δ-函数的性质，我们只好在普通函数的范围内，采取初等“证明”．但是，δ-函数毕竟不是普通函数，因此，这些“证明”也只能当做示意性说明．

最后，尽管证明不易，我们还是要指出与 δ-函数的上述定义等价的另一个定义：

定义 1.4 我们称 $\delta(x-\xi)$ 为 δ-函数，如果对于任一于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$，恒有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)f(x)dx=f(\xi)$$

这个定义表明，尽管 $\delta(x-\xi)$ 不是古典分析中的普通函数，然而，它和在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续的函数 $f(x)$ 的乘积在 $(-\infty,+\infty)$ 上

的积分运算，却不仅有确定的意义，而且其值就等于 $f(\xi)$. 后面我们将看到，正是由于 δ-函数的这一极其重要的运算性质，才使得它在广泛的实际应用中大放异彩.

§1.2 弱收敛

从定义 1.4 我们已经看到，δ-函数虽然不是普通函数，却和普通函数有着密切的联系. 下面将进一步指出，δ-函数可以视为普通函数的弱极限.

1.2.1 弱收敛的定义

定义 1.5 设依赖于参数 h 的函数族 $\{\varphi_h(x)\}$ 中的每一函数皆于 (a,b) 内有定义. 如果对任一于 (a,b) 内连续的函数 $f(x)$，恒有

$$\lim_{h\to\infty}\int_a^b f(x)\varphi_h(x)dx=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

则称函数族 $\{\varphi_h(x)\}$（于 (a,b) 内），当 $h\to\infty$ 时弱收敛于 $\varphi(x)$，或者称 $\varphi(x)$ 为函数族 $\{\varphi_h(x)\}$（于 (a,b) 内），当 $h\to\infty$ 时的弱极限. 记为

$$\lim_{h\to\infty}\varphi_h(x)\overset{弱}{=}\varphi(x)\qquad(a<x<b)\tag{1-5}$$

或者

$$\varphi_h(x)\overset{弱}{\underset{h\to\infty}{\Rightarrow}}\varphi(x)\qquad(a<x<b)\tag{1-6}$$

值得指出的是：

1° $\lim\limits_{h\to\infty}\varphi_h(x)\overset{弱}{=}\varphi(x)$ 乃是某种意义下的平均收敛——带“权”平均收敛的概念. 此权函数 $f(x)$ 并非特定的函数，而是于 (a,b) 内连续的任一函数. 此外，一个明显的事实是(1-5)式成立并不能保证当 $x\in(a,b)$ 时

$$\lim_{h\to\infty}\varphi_h(x)=\varphi(x)\tag{1-7}$$

成立，也就是说弱收敛不能保证(在普通意义下)收敛；

2° 函数族 $\{\varphi_h(x)\}$ 所依赖的参数 h，既可以是连续参量，也可以是离散参量；所论的极限过程，既可以如定义所述为 $h\to\infty$，也可能

是 $h\to 0$ 或 $h\to a$(a 为某常数)等,这完全视函数族$\{\varphi_h(x)\}$对参数 h 的依赖关系而定;

3° 对函数族$\{\varphi_h(x)\}$所要求的条件,则常常视具体问题而定;

4° 区间(a,b)也可以是$(a,+\infty)$,$(-\infty,b)$或$(-\infty,+\infty)$;然而,此时对权函数 $f(x)$除要求连续性外,往往还要附加其它限制条件,如要求 $f(x)$有界等.

1.2.2 把 δ-函数看作普通函数的弱极限

按定义 1.4 和 1.5 及其说明 4°,易知

$$\lim_{h\to\infty}\varphi_h(x)\overset{弱}{=}\delta(x)\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

的充分必要条件是对任一在$(-\infty,+\infty)$上连续的有界函数 $f(x)$*,恒有

$$\lim_{h\to\infty}\int_{+\infty}^{+\infty}\varphi_h(x)f(x)dx=f(0)\tag{1-8}$$

事实上,由定义 1.4

$$f(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)dx$$

再根据定义 1.5 及其说明 4°,立即得证.

这里,函数族$\{\varphi_h(x)\}$所依赖的参数 h,仍有如 1.2.1 中的 4°所作的说明.

上述充要条件尽管非常浅显,却提供了论证某函数族以 δ-函数为弱极限的一个适用的方法.

例 1.3 设脉冲函数

$$s_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & 当\ |x|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}\ 时\\[2ex] 0 & 当\ |x|>\dfrac{\varepsilon}{2}\ 时\end{cases}$$

证明

---

* 依问题的要求,有时则对 $f(x)$于$(-\infty,+\infty)$上附加另外的限制条件(见例 1.7);有时则除连续性限制条件外,并不附加其它条件(见例 1.8).

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} s_\varepsilon(x) \overset{\text{弱}}{=} \delta(x) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

证明 按 $s_\varepsilon(x)$ 的定义及积分中值定理知，对任一于 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_\varepsilon(x) f(x) dx = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{\varepsilon} f(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} f(\xi)\left[\frac{\varepsilon}{2} - \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

$$= f(\xi) \qquad \left(-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \xi \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

于是，由 $f(x)$ 的连续性立即得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} s_\varepsilon(x) f(x) dx = \lim_{\xi\to 0^+} f(\xi) = f(0)$$

这表明

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} s_\varepsilon(x) \overset{\text{弱}}{=} \delta(x) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

例 1.4 设半径为 ε 的一维球形函数

$$J_\varepsilon(x) = \begin{cases} (\varepsilon r)^{-1} \exp\left(\dfrac{-x^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) & \text{当 } |x| < \varepsilon \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } |x| \geqslant \varepsilon \text{ 时} \end{cases}$$

其中

$$r = \int_{-1}^{1} \exp\left(\frac{-x^2}{1-x^2}\right) dx$$

证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} J_\varepsilon(x) \overset{\text{弱}}{=} \delta(x) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

证明 由 $J_\varepsilon(x)$ 的定义以及积分中值定理*，对任一于 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J_\varepsilon(x) f(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon r} \exp\left(\frac{-x^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) f(x) dx$$

---

* 这里用到的积分中值定理是：设 $f(x)$，$g(x)$ 皆于 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 于 $[a,b]$ 上非负（或非正），则存在 $\xi \in [a,b]$ 能使：

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

$$= f(\xi)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon r}\exp\left[\frac{-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}\right]dx \qquad (-\varepsilon<\xi<\varepsilon)$$

令 $\frac{x}{\varepsilon}=u$，立见

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon r}\exp\left[\frac{-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}\right]dx = \frac{1}{r}\int_{-1}^{1}\exp\left(\frac{-u^2}{1-u^2}\right)du = 1$$

于是，由 $f(x)$ 的连续性便知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}J_\varepsilon(x)f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}f(\xi) = f(0)$$

从而得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}J_\varepsilon(x) \overset{\text{弱}}{=} \delta(x) \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

例 1.5 设开尔文(Kelvin)热源函数

$$\Phi_t(x,\xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right] \qquad (t>0, a>0)$$

其中 a 是常数．证明

$$\lim_{t\to 0^+}\Phi_t(x,\xi) \overset{\text{弱}}{=} \delta(x-\xi) \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

证明 显然，只须证明对任何于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的有界函数 $f(x)$，恒有

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_t(x,\xi)f(x)dx = f(\xi) \qquad (1\text{-}9)$$

即可．令 $u=\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}$，可见对任何 $t>0$，恒有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_t(x,\xi)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = 1^{*} \qquad (1\text{-}10)$$

---

* $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du$ 称为概率积分，其值为 $\sqrt{\pi}$．一般的高等数学书中，都有其求法．

从而，欲证(1-9)式成立，又只须证明

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_t(x,\xi)[f(x)-f(\xi)]dx=0 \tag{1-11}$$

由 $f(x)$ 的连续性知，对于固定的 $\xi\in(-\infty,+\infty)$ 而言，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_0>0$，使得当 $|x-\xi|\leqslant\delta_0$ 时，有

$$|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon/3 \tag{1-12}$$

此外，显然有

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_t(x,\xi)[f(x)-f(\xi)]dx\right|\leqslant\left|\int_{-\infty}^{\xi-\delta_0}\Phi_t(x,\xi)[f(x)-f(\xi)]dx\right|$$
$$+\left|\int_{\xi-\delta_0}^{\xi+\delta_0}\Phi_t(x,\xi)[f(x)-f(\xi)]dx\right|+\left|\int_{\xi+\delta_0}^{+\infty}\Phi_t(x,\xi)[f(x)-f(\xi)]dx\right| \tag{1-13}$$

而由(1-10)及(1-12)式知

$$\left|\int_{\xi-\delta_0}^{\xi+\delta_0}\Phi_t(x,\xi)[f(x)-f(\xi)]dx\right|\leqslant\int_{\xi-\delta_0}^{\xi+\delta_0}\Phi_t(x,\xi)|f(x)-f(\xi)|dx$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}\int_{\xi-\delta_0}^{\xi+\delta_0}\Phi_t(x,\xi)dx\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_t(x,\xi)dx=\frac{\varepsilon}{3} \tag{1-14}$$

由 $f(x)$ 的有界性知，存在 $M>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant M \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

因此，由代换 $u=\dfrac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}$ 便有

$$\left|\int_{\xi+\delta_0}^{+\infty}\Phi_t(x,\xi)[f(x)-f(\xi)]dx\right|\leqslant 2M\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\delta_0/2at^{1/2}}^{+\infty}e^{-u^2}du$$

由积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du$ 的收敛性可见

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{\frac{\delta_0}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-u^2}du=0$$

于是，存在 $\delta_1>0$，使得当 $0<t<\delta_1$ 时，

$$\left|\int_{\xi+\delta_0}^{+\infty}\Phi_t(x,\xi)[f(x)-f(\xi)]dx\right|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{1-15}$$

同理，存在 $\delta_2>0$，使得当 $0<t<\delta_2$ 时，

$$\left|\int_{-\infty}^{\xi-\delta_0}\Phi_t(x,\xi)[f(x)-f(\xi)]dx\right|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{1-16}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则由(1-13)、(1-14)、(1-15)、(1-16)式知，当 $0<t<\delta$ 时，有

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_t(x,\xi)[f(x)-f(\xi)]dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

这表明(1-11)式成立.

例 1.6 设柯希(cauchy)函数

$$\varphi_\eta(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\eta}{\eta^2+x^2}\qquad(\eta>0)$$

证明

$$\lim_{\eta\to 0^+}\varphi_\eta(x)\overset{\text{弱}}{=}\delta(x)\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

证明 注意到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\eta(x)dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\varphi_\eta(x)dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{\eta}{\eta^2+x^2}dx$$

$$=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{b}{\eta}-\operatorname{arctg}\frac{a}{\eta}\right]=1\qquad(1\text{-}17)$$

可见，只须证明对任一于$(-\infty,+\infty)$上连续的有界函数 $f(x)$，恒有

$$\lim_{\eta\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\eta(x)[f(x)-f(0)]dx=0\qquad(1\text{-}18)$$

由 $f(x)$的连续性知，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_0>0$，使得当 $|x|\leqslant\delta_0$ 时，有

$$|f(x)-f(0)|<\varepsilon/3\qquad(1\text{-}19)$$

此外，显然有

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\eta(x)[f(x)-f(0)]dx\right|\leqslant\int_{-\infty}^{-\delta_0}\varphi_\eta(x)|f(x)-f(0)|dx$$

$$+\int_{-\delta_0}^{\delta_0}\varphi_\eta(x)|f(x)-f(0)|dx+\int_{\delta_0}^{+\infty}\varphi_\eta(x)|f(x)-f(0)|dx$$

$$(1\text{-}20)$$

而由(1-19)和(1-17)式知

$$\int_{-\delta_0}^{\delta_0}\varphi_\eta(x)|f(x)-f(0)|dx<\frac{\varepsilon}{3}\int_{-\delta_0}^{\delta_0}\varphi_\eta(x)dx\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\eta(x)dx=\frac{\varepsilon}{3}$$

$$(1\text{-}21)$$

由 $f(x)$的有界性知，存在 $M>0$，使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

于是，作变换 $u=\dfrac{x}{\eta}$ 便得

$$\int_{\delta_0}^{+\infty} \varphi_\eta(x)\,|f(x)-f(0)|\,dx \leqslant 2M \cdot \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\delta_0}{\eta}}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}du$$

从而，由积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{du}{1+u^2}$ 的收敛性可知，存在 $\delta_1>0$，使得当 $0<\eta<\delta_1$ 时，

$$\int_{\delta_0}^{+\infty} \varphi_\eta(x)\,|f(x)-f(0)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1-22}$$

同理，存在 $\delta_2>0$，使得当 $0<\eta<\delta_2$ 时，

$$\int_{-\infty}^{-\delta_0} \varphi_\eta(x)\,|f(x)-f(0)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1-23}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则由(1-20)、(1-21)、(1-22)和(1-23)式可见，当 $0<\eta<\delta$ 时，

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\eta(x)[f(x)-f(0)]dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

这表明(1-18)式成立.

例 1.7 设狄里赫利(Dirichlet)函数

$$\varphi_N(x)=\frac{\sin Nx}{\pi x}$$

证明

$$\lim_{N\to\infty}\varphi_N(x) \overset{\text{弱}}{=} \delta(x) \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

证明 我们只须证明，对任一于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且按段光滑* 的函数 $f(x)$，如果 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则恒有

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x)f(x)dx=f(0) \tag{1-24}$$

---

* 我们称 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上按段连续，如果 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上除有限个第一类间断点外，处处连续；如果 $f(x)$，$f'(x)$ 皆于 $[a,b]$ 上按段连续，则称 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上按段光滑；如果定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 于任意闭区间 $[a,b]$ 上按段光滑，则称 $f(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上按段光滑.

我们首先证明，若 $f(x)$ 于 $[-a,a]$ 上连续且按段光滑，则

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-a}^{+a}f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx=f(0) \tag{1-25}$$

为此，显然只须证明

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{0}^{a}f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx=\frac{f(0)}{2} \tag{1-26}$$

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-a}^{0}f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx=\frac{f(0)}{2} \tag{1-27}$$

此二式的证明是类似的，我们只证明(1-26)式．由

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2} \tag{1-28}$$

所以

$$\int_{0}^{a}f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx-\frac{f(0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{a}f(x)\frac{\sin Nx}{x}dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(0)\frac{\sin Nx}{x}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{a}\frac{f(x)-f(0)}{x}\sin Nx dx-\frac{1}{\pi}\int_{a}^{+\infty}f(0)\frac{\sin Nx}{x}dx$$

因为 $f(x)$ 于 $[-a,a]$ 上按段光滑，所以函数 $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 于 $[0,a]$ 上按段连续，从而于 $[0,a]$ 上可积．于是根据黎曼引理* 知

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{a}\frac{f(x)-f(0)}{x}\sin Nx dx=0$$

作变数替换 $u=Nx$，则由(1-28)式可得

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{a}^{+\infty}f(0)\frac{\sin Nx}{x}dx=\frac{f(0)}{\pi}\lim_{N\to+\infty}\int_{Na}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du=0 \tag{1-29}$$

故

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{0}^{a}f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx=\frac{f(0)}{2}$$

---

* 黎曼引理：设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上可积，则

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{a}^{b}f(x)\sin Nx dx=0$$

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{a}^{b}f(x)\cos Nx dx=0$$

这就证明了(1-26)式．联合类似可证的(1-27)式，便知(1-25)式成立．

下面证明(1-24)式．由于对任何 $a>0$，

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx\right| \leqslant \frac{1}{\pi a}\int_a^{+\infty}|f(x)|dx \leqslant \frac{1}{\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$$

因此

$$\lim_{a\to+\infty}\int_a^{+\infty} f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx = 0$$

同理

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-\infty}^{-a} f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx = 0$$

于是，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，使得当 $a\geqslant A$ 时，

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}\quad, \left|\int_{-\infty}^{-a} f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

特别有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}\quad, \left|\int_{-\infty}^{-A} f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

注意(1-25)式中 $a>0$ 的任意性可知，存在 $M>0$，使得当 $N\geqslant M$ 时，

$$\left|\int_{-A}^{A} f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx - f(0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

故当 $N\geqslant M$ 时，

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx - f(0)\right| &\leqslant \left|\int_{-\infty}^{-A} f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx\right| \\ &+ \left|\int_{-A}^{A} f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx - f(0)\right| \\ &+ \left|\int_A^{+\infty} f(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

这表明(1-24)式成立，从而结论得证．

正如定义 1.5 的说明 1°所指出，上述诸例所列举的函数，都在某种意义下带权平均收敛于 δ-函数。于是这些函数与 δ-函数都有着深刻的内在联系．然而，无论如何也不能误认为上述诸例中所列举的函数(逐点)收敛于 δ-函数．比如例 1.3 中所列举的函数 $s_r(x)$，若形

式地记成

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s_\varepsilon(x) = \eta(x)$$

则显然当 $x\neq 0$ 时,

$$\eta(x) = 0$$

因此,$\eta(x)$满足定义 1.3 的条件 1°. 可是,尽管对任何 $\varepsilon>0$,恒有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_\varepsilon(x)dx = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{\varepsilon}dx = 1$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} s_\varepsilon(x)dx = 1$$

但由于上述极限不能取到积分号下,因此,不能得出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x)dx = 1$$

可见 $\eta(x)$不能满足定义 1.3 的条件 2°. 因此 $\eta(x)$不可能是 δ-函数,从而 $s_\varepsilon(x)$并非逐点收敛于 δ-函数. 其实,δ-函数根本不是逐点有定义的普通函数.

1.2.3 磨光算子

所谓磨光算子,是一个把 1.2.2 中例 1.4 所列举的函数略加变动后作为核函数的积分算子. 从而,可以看出磨光算子与 δ-函数的内在联系. 磨光算子是一种非常灵活、适用的数学工具. 它的作用在于:对于问题中光滑程度不符合要求的函数,首先用“磨光”后的、与原来函数任意逼近的十分光滑的函数替代之;由于“磨光”后的函数符合问题的要求,经过推理或计算,得出相应的结论;尔后,基于“磨光”后的函数与原来的函数任意逼近,便可推出对原来函数所应有的结论.

定义 1.6 设

$$J(x) = \begin{cases} r^{-1}\exp\left(\dfrac{-x^2}{1-x^2}\right) & \text{当 } |x|<1 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } |x|\geqslant 1 \text{ 时} \end{cases}$$

其中

$$r = \int_{-1}^{1} \exp\left(\frac{-x^2}{1-x^2}\right)dx$$

则以

$$J_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\varepsilon}J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \qquad (\varepsilon > 0)$$

为核的积分算子

$$J_\varepsilon\varphi(x) = \int_a^b J_\varepsilon(x,y)\varphi(y)dy = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varphi(y)dy$$

为一维磨光算子，其中 $\varphi(x)$为于$[a,b]$上可积的函数．

一维磨光算子的理论意义及其应用，主要基于如下的定理：

定理 1.1 设 $\varphi(x)$于$[a,b]$上连续，则 $J_\varepsilon\varphi(x)$于$[a,b]$上任意次连续可微，且极限式

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon\varphi(x) = \varphi(x)$$

于$[a,b]$上一致成立．

证明 结论的前一部分，由含参变量积分在积分号下的微商定理* 立即得证．为证明结论的后一部分，首先将 $\varphi(x)$连续有界地延拓到$(-\infty,+\infty)$上．为此，设

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(a) & \text{当 } x < a \text{ 时} \\ \varphi(x) & \text{当 } a \leqslant x \leqslant b \text{ 时} \\ \varphi(b) & \text{当 } x > b \text{ 时} \end{cases}$$

于是，由 $\overline{\varphi}(x)$于任一有界闭区间上的一致连续性及 $J_\varepsilon(x,y)$的定义可知，于$[a,b]$上一致地有

$$|J_\varepsilon\varphi(x) - \varphi(x)| \leqslant \left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} J_\varepsilon(x,y)\overline{\varphi}(y)dy - \varphi(x)\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} J_\varepsilon(x,y)dy\right| \leqslant$$

---

* 此定理为：设 $f(x,y)$、$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$皆于 $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$ 上连续，则

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

于$[a,b]$上可微，且

$$g'(x) = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy$$

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} J_\varepsilon(x,y)\,|\bar{\varphi}(y)-\bar{\varphi}(x)|\,dy \leqslant \max_{\substack{|y-x|\leqslant\varepsilon\\ x\in[a,b]}} |\bar{\varphi}(y)-\bar{\varphi}(x)| \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} J_\varepsilon(x,y)\,dy$$

$$= \max_{\substack{|y-x|\leqslant\varepsilon\\ x\in[a,b]}} |\bar{\varphi}(y)-\bar{\varphi}(x)| \to 0 \qquad (\varepsilon\to 0)$$

至此,定理证完.

下面我们举例说明磨光算子的应用.此例虽略嫌专门,但读者可以侧重于领会磨光算子的应用,余者皆可简略而过.

例 1.8 考虑含小参数 $\mu>0$ 的常微分方程边值问题

$$\begin{cases}\mu z''=f(x,z,\mu)\\ z(0)=0,z(1)=0\end{cases} \tag{1-30}$$

的解与隐函数方程

$$f(x,u,0)=0 \tag{1-31}$$

的解之间的关系.记

$$G=\{(x,z,\mu)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,|z|\leqslant \alpha,0\leqslant\mu\leqslant\beta\}$$

其中 α,β 为正的常数.假设

1° $f(x,z,\mu)$于 G 上连续可微,且 $f'_z(x,z,0)\geqslant m>0$ $(0\leqslant x\leqslant 1,|z|\leqslant\alpha)$;

2° 方程(1-31)于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上存在解 $u=u(x)$,且有 $|u(x)|<\alpha$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

则当 $\mu>0$ 充分小时,边值问题(1-30)恒存在解 $z=z(x,\mu)$,且有估计式

$$|z(x,\mu)-u(x)|\leqslant |u(0)|e^{-\left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/2}x}+|u(1)|e^{\left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/2}(x-1)}+c\mu$$

$$(0\leqslant x\leqslant 1)$$

其中 $c>0$ 为与 μ 无关的常数.

为证明例 1.8 的结论,我们将不加证明地引述如下定理:

定理 1.2(Nagumo) 假设

(Ⅰ)$\underline{\omega}(x),\bar{\omega}(x)$于$[a,b]$上两次连续可微,且当 $a<x<b$ 时,$\underline{\omega}(x)<\bar{\omega}(x)$,记

$$B^*=\{(x,y,y')\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\underline{\omega}(x)\leqslant y\leqslant\bar{\omega}(x),-\infty<y'<+\infty\}$$

(Ⅱ)$f(x,y,y'),f'_y(x,y,y'),f'_{y'}(x,y,y')$皆于 B^* 上连续;

（Ⅲ）当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，恒有

$$\bar{\omega}''(x)<f(x,\bar{\omega}(x),\bar{\omega}'(x))$$

$$\underline{\omega}''(x)>f(x,\underline{\omega}(x),\underline{\omega}'(x))$$

（Ⅳ）于 B^* 上，$|f(x,y,y')|\leqslant\varphi(|y'|)$，此处 $\varphi(u)$ 为于 $u\geqslant 0$ 上连续的正值函数，并且

$$\int_0^{+\infty}\frac{udu}{\varphi(u)}=\infty$$

则于平面区域 $B=\{(x,y)\,|a\leqslant x\leqslant b,\underline{\omega}(x)\leqslant y\leqslant\bar{\omega}(x)\}$ 内不在同一垂直线上的两点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2)（不妨设 $x_1<x_2$），方程

$$y''=f(x,y,y')$$

存在解 $y=y(x)$，使得

$$(x,y(x))\in B\quad(x_1\leqslant x\leqslant x_2)$$

并且

$$y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)=y_2$$

现在回到例 1.8 所述结论的证明．按隐函数存在定理知，$u(x)$ 于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上连续可微．由于 $u(x)$ 的光滑程度不敷下面证明的需要，所以要对它进行磨光处理．令

$$u_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)dy\qquad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

由定理 1.1 可知，$u_\varepsilon(x)$ 于 $[0,1]$ 上任意次连续可微．仿定理 1.1 的证明，将 $u(x)$ 延拓，使之在整个数轴上仍连续可微，即设

$$\bar{u}(x)=\begin{cases}u(0)+u'(0)x & \text{当 } -\infty<x<0 \text{ 时}\\ u(x) & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时}\\ u(1)+u'(1)(x-1) & \text{当 } 1<x<+\infty \text{ 时}\end{cases}$$

易见 $\bar{u}(x)$ 于 $-\infty<x<+\infty$ 上连续可微．于是

$$u_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\bar{u}(y)dy\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

故按定理 1.1 的证明及拉格朗日中值定理知，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$|u_\varepsilon(x)-u(x)|\leqslant\max_{\substack{|y-x|\leqslant\varepsilon\\ x\in[0,1]}}|\bar{u}(y)-u(x)|\leqslant P\varepsilon\qquad(1\text{-}32)$$

其中，$P=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|u'(x)|$．由分部积分法及 $J(x)$ 的定义，有

$$u'_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial x}J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]\bar{u}(y)dy+\left[\frac{1}{\varepsilon}J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\bar{u}(y)\right]_{y=x+\varepsilon}$$

$$-\left[\frac{1}{\varepsilon}J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\bar{u}(y)\right]_{y=x-\varepsilon}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial y}J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]\bar{u}(y)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{\varepsilon}J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\bar{u}(y)\right]_{y=x-\varepsilon}^{y=x+\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\bar{u}'(y)dy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\bar{u}'(y)dy \tag{1-33}$$

据此，再作变量替换$\frac{x-y}{\varepsilon}=\xi$，得

$$u''_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial x}J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]\bar{u}'(y)dy+\left[\frac{1}{\varepsilon}J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\bar{u}'(y)\right]_{y=x+\varepsilon}$$

$$-\left[\frac{1}{\varepsilon}J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\bar{u}'(y)\right]_{y=x-\varepsilon}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{1}{\tau}\frac{-2\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}{\left[1-\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)^2\right]^2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\exp\left[\frac{-\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)^2}{1-\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)^2}\right]\bar{u}'(y)dy$$

$$=-\frac{2}{\tau\varepsilon}\int_{-1}^{1}\frac{\xi}{(1-\xi^2)^2}\exp\left(\frac{-\xi^2}{1-\xi^2}\right)\bar{u}'(x-\varepsilon\xi)d\xi$$

可见存在 $R>0$，使得当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$|u''_\varepsilon(x)|\leqslant\frac{R}{\varepsilon} \tag{1-34}$$

记

$$M=ST+L+1 \tag{1-35}$$

其中 $S=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|u'(x)|$，$T=\max\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ |z|\leqslant a}}f'_z(x,z,0)$． 令 $\varepsilon=\mu^{\frac{1}{2}}$，取

$$\underline{\omega}_\mu(x)=u_{\mu^{1/2}}(x)-\delta_0|u(0)|e^{-\left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/2}x}-\delta_1|u(1)|e^{\left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/2}(x-1)}-\frac{M}{m}\mu^{\frac{1}{2}}$$

$$(0\leqslant x\leqslant 1)$$

$$\underline{\omega}_\mu(x)=u_{\mu^{1/2}}(x)+(1-\delta_0)|u(0)|e^{-\left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/2}x}$$

$$+ (1-\delta_1)|u(1)|e^{\left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/2}(x-1)} + \frac{M}{m}\mu^{\frac{1}{2}} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

此处

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & \text{当 } u(i) < 0 \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } u(i) \geqslant 0 \text{ 时} \end{cases} \qquad (i = 0,1)$$

显然 $\underline{\omega}_\mu(x)$,$\bar{\omega}_\mu(x)$于[0,1]上两次连续可微*(其实是任意次连续可微的),并且

$$\underline{\omega}_\mu(x) < u_\mu^{1/2}(x) < \bar{\omega}_\mu(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \qquad (1-36)$$

此外,当 $\mu>0$ 充分小时,

$$\underline{\omega}_\mu(0) < 0 < \bar{\omega}_\mu(0), \qquad \underline{\omega}_\mu(1) < 0 < \bar{\omega}_\mu(1)$$

并且

$$|\underline{\omega}_\mu(x)| \leqslant a, |\bar{\omega}_\mu(x)| \leqslant a \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

记

$$B_\mu^* = \{(x,z,z') \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, \underline{\omega}_\mu(x) \leqslant z \leqslant \bar{\omega}_\mu(x), -\infty < z' < +\infty\}$$

则对于充分小的 $\mu>0$,$f(x,z,\mu)$,$f_z'(x,z,\mu)$皆于 B_μ^* 上连续．由假设条件 1°知,自然存在 $A>0$,使得当$(x,z,\mu)\in G$ 时,

$$|f(x,z,\mu)| \leqslant A$$

由此可见定理 1.2 的条件(Ⅳ)被满足．又由拉格朗日中值定理及 $u(x)$是方程(1-31)的解可知

$$\begin{aligned} f(x,\underline{\omega}_\mu(x),\mu) &= \{f(x,\underline{\omega}_\mu(x),\mu) - f(x,\underline{\omega}_\mu(x),0)\} \\ &\quad + \{f(x,\underline{\omega}_\mu(x),0) - f(x,u_\mu^{1/2}(x),0)\} \\ &\quad + \{f(x,u_\mu^{1/2}(x),0) - f(x,u(x),0)\} \\ &= f'_\mu(x,\underline{\omega}_\mu(x),\theta\mu)\mu + f'_z(x,u_\mu^{1/2}(x) + \theta_2(\underline{\omega}_\mu(x) \\ &\quad - u_\mu^{1/2}(x)),0) \cdot (\underline{\omega}_\mu(x) - u_\mu^{1/2}(x)) \\ &\quad + f'_z(x,u(x) + \theta_3(u_\mu^{1/2}(x) - u(x)),0) \end{aligned}$$

---

* 这里可以看出将 $u(x)$磨光的作用．事实上,若在 $\underline{\omega}_\mu(x)$,$\bar{\omega}_\mu(x)$的表达式中,以 $u(x)$ 取代 $u_\mu^{1/2}(x)$则此时 $\underline{\omega}_\mu(x)$,$\bar{\omega}_\mu(x)$显然并不是两次连续可微函数．

$$\cdot (u_{\mu^{1/2}}(x) - u(x)) \tag{1-37}$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2,\theta_3<1$. 根据条件 1°知

$$\lim_{\mu\to 0} f'_{\mu}(x,\underline{\omega}_{\mu}(x),\theta,\mu)\mu^{1/2} = 0 \tag{1-38}$$

由(1-34)式,

$$|\mu^{1/2}u''_{\mu^{1/2}}(x)| \leqslant R \qquad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

据此及(1-37)、(1-38)、(1-32)、(1-35)、(1-36)诸式与条件 1°可知,当 $\mu>0$ 充分小时,

$$\begin{aligned} f(x,\underline{\omega}_{\mu}(x),\mu) &< \mu^{1/2} + m(\underline{\omega}_{\mu}(x) - u_{\mu^{1/2}}(x)) + TP\mu^{1/2} \\ &\quad + R\mu^{1/2} + \mu u''_{\mu^{1/2}}(x) \\ &= M\mu^{1/2} + m(\underline{\omega}_{\mu}(x) - u_{\mu^{1/2}}(x)) + \mu u''_{\mu^{1/2}}(x) \\ &= \mu\underline{\omega}_{\mu}''(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1) \end{aligned}$$

同理可证,当 $\mu<0$ 充分小时,

$$f(x,\bar{\omega}_{\mu}(x),\mu) > \mu\bar{\omega}_{\mu}''(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

综上所述,根据定理 1.2 可知,当 $\mu>0$ 充分小时,方程(1-30)存在解 $z=z(x,\mu)$满足

$$\underline{\omega}_{\mu}(x) \leqslant z(x,\mu) \leqslant \bar{\omega}_{\mu}(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1) \tag{1-39}$$

据(1-36)及(1-39)式,并由 $\underline{\omega}_{\mu}(x)$,$\bar{\omega}_{\mu}(x)$的表达式知,当 $\mu>0$ 充分小时,

$$|z(x,\mu) - u_{\mu^{1/2}}(x)| \leqslant |u(0)|e^{-\left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/2}x} + |u(1)|e^{\left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/2}(x-1)} + \frac{M}{m}\mu^{1/2}$$

再由(1-32)式,并记 $C=P+\dfrac{M}{m}$便知,当 $\mu>0$ 充分小时,于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上有

$$\begin{aligned} |z(x,\mu) - u(x)| &\leqslant |z(x,\mu) - u_{\mu^{1/2}}(x)| + |u_{\mu^{1/2}}(x) - u(x)| \\ &\leqslant |u(0)|e^{-\left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/2}x} + |u(1)|e^{\left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/2}(x-1)} + c\mu^{1/2} \end{aligned}$$

至此,本例的结论全部获证.

从例 1.8 大致可以看出磨光算子这一数学工具的应用.而磨光算子这一积分算子的核,则与 δ-函数密切相关,因此,磨光算子的作用也正是体现了 δ-函数的作用.

§1.3 δ-函数的几何意义与物理意义

δ-函数的定义1.1至定义1.3,反映了δ-函数鲜明的直观背景,而与其等价的定义1.4,则反映δ-函数深刻的运算意义. 下面分别就定义1.1至定义1.3以及定义1.4,从两个不同的侧面,来说明δ-函数的几何意义与物理意义,以便较为全面地阐述.

1.3.1 几何意义

1. 由δ-函数的定义1.1至定义1.3,以及根据例1.3至例1.7所指出的把δ-函数视为普通函数的弱极限的观点,可以大体上把$\delta(x-\xi)$看作是定义于整个数轴上的一条示意性的平面曲线(如图1-1所示),它具有如下几何性质:

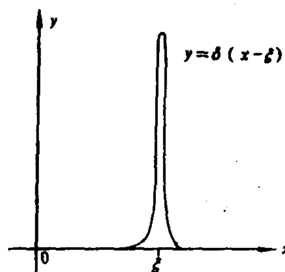


图 1-1

1° 在点$x=\xi$的无限窄的邻域之外,此曲线与x轴重合;

2° 在点$x=\xi$的无限窄的邻域上,此曲线突起了一个无限高的"峰";

3° 此曲线下的面积为有限值1.

正由于δ-函数并非古典意义下的普通函数,因此,显然不能在通常意义下给出δ-函数确切的几何解释. 上述几何意义,只能算是一种粗糙的看法而已. 然而,正是这种粗糙的示意性的看法,才使得我们能够对δ-函数这种乍看起来很"怪"的函数,有一个直观、形象的理解.

2. 表征δ-函数运算性质的定义1.4,其几何意义也是很明显的. 它表明当ξ由$-\infty$变到$+\infty$时,平面上点$\left(\xi,\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)f(x)dx\right)$的轨迹正是函数$y=f(x)\ (-\infty<x<+\infty)$的几何图形.

1.3.2 物理意义

1. δ-函数的定义 1.1 至定义 1.3，以及作为 δ-函数的物理背景在 § 1.1 中所列举的两个实例表明，δ-函数反映了集中分布的物理量的物理特性——集中分布的物理量的密度分布函数，如电荷分布密度、物质分布密度等等的特性. 值得指出的是，δ-函数在物理上乃是集中分布的物理量的密度函数的局部分布和总体效应相结合的产物. 如在定义 1.2 中

$$\delta(x-\xi)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\neq\xi \text{ 时}\\ \infty & \text{当 } x=\xi \text{ 时}\end{cases}$$

代表集中分布的物理量的密度的局部分布状态；而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)dx=1$$

则是该集中分布的物理量的密度分布的总体效应. 它表明若集中分布的物理量是电荷，则其电荷分布密度的总体效应与单位电荷等效；若集中分布的物理量是某种物质质量，则该物质分布密度的总体效应与单位质量等效.

为了着重强调 δ-函数的物理意义，有时我们还称 $\delta(x-\xi)$ 为单位冲激函数，或者也称之为于点 $x=\xi$ 处强度为 1 的冲激函数或单位脉冲函数. 更一般地，我们称 $C\delta(x-\xi)$ 为于 $x=\xi$ 处，强度为 C 的冲激函数.

δ-函数远不是象其定义的物理背景那样，只能描述集中分布于一点的物理量的物理特性，而是可以更广泛地表达一般离散（集中）分布的物理量的物理特性. 不仅如此，借助于 δ-函数，还可以对连续分布与离散（集中）分布的物理量的物理特性，施以统一的数学表达.

例 1.9 设于 x 轴上，在 $x=-1$ 处置有电量为 2 个单位的点电荷，在 $x=0$ 处置有单位点电荷，在 $x=1$ 处置有 2 个单位的点电荷，在 $x=2$ 处置 3 个单位的点电荷；而在别处没有电荷分布. 则根据 δ-函数的定义及其物理意义可知，x 轴上各点的电荷分布密度为

$$\rho(x)=2\delta(x+1)+\delta(x)+2\delta(x-1)+3\delta(x-2)$$

并且，此电荷分布密度的总体效应——在 x 轴上分布的电荷总量显然是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x+1)dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx$$
$$+ 2\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-1)dx + 3\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-2)dx = 8(\text{单位})$$

例 1.10 设于 x 轴上连续地分布某种物质，物质分布密度为 $\gamma(x)$，并假定于点 $x=x_k$ 处，还置有质量为 $m_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的重物．试求 x 轴上各点的物质分布密度、x 轴上分布的物质的全部质量及其重心的位置.

解 按 δ-函数的定义及其物理意义可知，x 轴上各点的物质分布密度为

$$\rho(x) = \gamma(x) + \sum_{k=1}^{n} m_k\delta(x - x_k)$$

于是，x 轴上分布的物质的全部质量为

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(x)dx + \sum_{k=1}^{n} m_k\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x - x_k)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(x)dx + \sum_{k=1}^{n} m_k$$

所求的重心坐标为

$$x_C = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)dx} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx}{M} \tag{1-40}$$

原来仅对连续分布的情形才成立的(1-40)式，现在则对离散(集中)分布的情形也成立. 这就使得不论物质是连续分布还是离散(集中)分布的情形，其重心坐标都可以用一个统一的公式(1-40)式求得. 只不过是在离散分布的情形下，$\rho(x)$的表达式中出现 δ-函数，而在连续分布的情形，则不出现这种奇异函数而已. 众所周知，类似于(1-40)式，将连续分布和离散分布的物理量，施以统一数学表达的实例，是垂手可拾的. 能够把这种对立的物理对象进行统一的数学处理，关键在于引进了能够恰当反映集中分布这一物理特性的奇异函

数—— δ-函数.

2. 定义 1.4 更为深刻地体现了借助于 δ-函数所反映出的集中分布与连续分布的物理量的内在联系.

如考察由时刻 $\tau=\alpha$ 到 $\tau=\beta$ 这段时间内，持续力 $F(\tau)$的作用，由于$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)dx=1$ 是无量纲量，因此，规定了 δ-函数的量纲为

$$[\delta(x-\xi)]=\frac{1}{[x]}$$

于是，若视 $d\tau$ 为无穷小，则于时刻 $\tau=t$ 可以认为 $\delta(\tau-t)d\tau=1$. 从而，$F(\tau)\delta(\tau-t)d\tau$ 便可以看作是于时间区间 $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ 上，只于时刻 $\tau=t\in[\alpha,\beta]$处瞬时起作用且取值为 $F(t)$ 瞬时力，即

$$F(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=F_t(\tau)$$

其中

$$F_t(\tau)=\begin{cases}F(t) & \text{当 } \tau=t \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } \tau\neq t \text{ 且 } \tau\in[\alpha,\beta] \text{ 时}\end{cases}$$

将 $F(t)$连续地延拓到$(-\infty,+\infty)$上，比如设

$$\overline{F}(\tau)=\begin{cases}F(\alpha) & \text{当 } \tau<\alpha \text{ 时}\\ F(\tau) & \text{当 } \alpha\leqslant\tau\leqslant\beta \text{ 时}\\ F(\beta) & \text{当 } \tau\geqslant\beta \text{ 时}\end{cases}$$

则由 δ-函数的定义知，当 $t\in[\alpha,\beta]$时，

$$\int_{\alpha}^{\beta}F(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F}(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=\overline{F}(t)=F(t)$$

这表明于时刻 $\tau=t\in[\alpha,\beta]$瞬时起作用，且取值为 $F(t)$的瞬时力 $F_t(\tau)$在时间区间$[\alpha,\beta]$上的总体效应，与在$[\alpha,\beta]$上的持续力 $F(\tau)$在时刻 $\tau=t$ 处的瞬时效应等效. 既然$[\alpha,\beta]$上的持续力 $F(\tau)$可视为当 τ 由 α 变到 β 时诸 $F(\tau)$迭加而成，于是它自然可以视为在时刻 $\tau=t$ 处瞬时起作用的瞬时力 $F_t(\tau)$当 t 由 α 变到 β 时迭加的结果. 这个具有普遍意义的重要结论，清楚地阐明了连续分布与集中分布的物理量之间的内在联系；它表明为了考察连续分布的物理量的物理特性，可先考虑集中分布的情形，尔后再利用迭加原理，便可达到预期的目的. 在本书所述的应用部分中，多处用到这一结论.

§ 1.4 间断函数的导数

按古典分析的理论，一个函数若在其定义域内的某点处可导(即导数存在)，则函数在该点处必然连续. 因此，一个间断函数在其间断点处必不可导. 然而，我们利用 δ-函数却可以研究间断函数的导数，这也进一步说明了引入 δ-函数的重要意义.

鉴于 δ-函数不是普通函数，因此，用 δ-函数表达的间断函数的导数，自然不再是古典意义下的普通导数，而是所谓广义导数. 对基于这种导数概念所作的推理，按理说都应借助于广义函数这一较深的数学工具才能获得严格的证明. 为了浅显易懂起见，下面所作的关于间断函数的导数的全部论述，都只好借助于古典分析工具进行，从而这也只能算是“粗糙的”示意性的说明. 不过，了解这些内容，对于读者理解和掌握 δ-函数及其应用还是很有益处的.

1.4.1 弱相等的概念

弱相等的概念正象弱收敛的概念一样，都是属于广义函数论的内容. 为了进一步讨论 δ-函数及其性质的需要，我们对这个概念只作简单扼要的介绍.

定义 1.7 如果对任一于$[a,b]$上连续的函数 $f(x)$，恒有

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\psi(x)dx$$

则称在弱意义下，于区间$[a,b]$上

$$\varphi(x) = \psi(x)$$

或称于区间$[a,b]$上，$\varphi(x)$与 $\psi(x)$是弱相等的.

顾名思义，弱相等的概念是通常函数相等概念的推广. 事实上不难证明，若 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$皆于$[a,b]$上连续，则由此二函数于区间$[a,b]$上在弱意义下相等，必可推得它们在通常意义下于$[a,b]$上相等. 假若不然，则存在 $x_0\in(a,b)$，使得

$$\varphi(x_0) \neq \psi(x_0)$$

于是，由 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的连续性知，存在 $\varepsilon>0$，使得当 $x_0-\varepsilon\leqslant x\leqslant x_0+\varepsilon$ 时，$\varphi(x)\neq\psi(x)$，不妨设

$$\varphi(x)-\psi(x)>0$$

于是，取定义于$[a,b]$上的连续函数

$$f(x)=\begin{cases}(x_0+\varepsilon-x)(x-x_0+\varepsilon) & \text{当 } x_0-\varepsilon\leqslant x\leqslant x_0+\varepsilon \text{ 时}\\ 0 & \text{在别处}\end{cases}$$

便得

$$\int_a^b[\varphi(x)-\psi(x)]f(x)dx$$

$$=\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}[\varphi(x)-\psi(x)](x_0+\varepsilon-x)(x-x_0+\varepsilon)dx>0$$

此矛盾表明，只要两个于$[a,b]$上连续的函数在弱意义下相等，就必在通常意义下相等.

需要指出的是，定义 1.7 中的区间有时也可以是(a,b)，还可以是$(-\infty,+\infty)$；如果是$(-\infty,+\infty)$，则除要求 $f(x)$ 于$(-\infty,+\infty)$上连续外，往往还将根据问题的要求，对 $f(x)$ 附加另外的限制条件.

1.4.2 间断函数的导数

如所熟知，在古典分析中，有如下的一条原函数存在定理：设 $f(x)$ 于$[a,b]$上连续，则函数

$$F(x)=\int_a^x f(\xi)d\xi$$

于$[a,b]$上可微，并且

$$F'(x)=f(x)$$

今考察

$$H(x)=\int_{-\infty}^x\delta(\xi)d\xi \tag{1-41}$$

按 δ-函数的定义知

$$H(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x<0 \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}\end{cases}$$

这个函数是亥维赛(Heaviside)由于对电器技术研究的需要而引进

的，通常称之为亥维塞单位函数，也称之为于点 $x=0$ 处跃度为 1 的阶跃函数(如图 1-2 所示).

将上述古典分析中原函数存在定理，形式地用于(1-41)式，便有

$$H'(x)=\delta(x) \qquad (-\infty<x<+\infty) \tag{1-42}$$

我们也称函数 $CH(x-\xi)$ 为于点 $x=\xi$ 处跃度为 C 的阶跃函数. 仿上所述，形式地有

$$\frac{d}{dx}[CH(x-\xi)]=C\delta(x-\xi) \quad (-\infty<x<+\infty) \tag{1-43}$$

这表明一个在间断点 $x=\xi$ 处跃度为 C 的阶跃函数的导数(即变化率)，等于在同一点处强度为 C 的冲激函数. (1-43)式是间断函数求导运算的基础. 由此可见，间断函数的导数并非普通意义下的导数，我们称之为广义导数或广义微商.

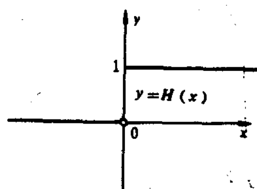


图 1-2

例 1.11　设 $f(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上除了 $x=\xi$ 是其第一类间断点外，处处可微，并且 $f'(\xi-0)=f'(\xi+0)$. 记 $f(x)$ 于 $x=\xi$ 处的跃度为

$$f(\xi+0)-f(\xi-0)=C$$

并定义

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{当 } x<\xi \text{ 时} \\ f(\xi-0) & \text{当 } x=\xi \text{ 时} \\ f(x)-C & \text{当 } x>\xi \text{ 时} \end{cases}$$

则根据假设便知 $\tilde{f}(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，且当 $x<\xi$ 及 $x>\xi$ 时有

$$f(x)=\tilde{f}(x)+CH(x-\xi)$$

于是，由(1-43)式可见，当 $-\infty<x<+\infty$ 时，

$$f'(x)=\tilde{f}'(x)+C\delta(x-\xi)$$

例 1.12　设

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{当 } x<2 \text{ 时} \\ x^2-5 & \text{当 } x>2 \text{ 时} \end{cases}$$

则由例 1.11 可知

$$f'(x) = 2x - 5\delta(x-2) \qquad (-\infty < x < +\infty) \quad (1\text{-}43)$$

事实上，根据例 1.11，定义函数

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{当 } x < 2 \text{ 时} \\ 4 & \text{当 } x = 2 \text{ 时} \\ x^2 & \text{当 } x > 2 \text{ 时} \end{cases}$$

再注意 $f(x)$ 于 $x=2$ 处的跃度为 -5，则由例 1.11 的结论立即可见 (1-43) 式是成立的.

例 1.13 考虑函数

$$\text{Sgn}x = \begin{cases} -1 & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \end{cases}$$

Sgn$x$ 被称为符号函数. 显然

$$\text{Sgn}x = -1 + 2H(x) \qquad (x \neq 0)$$

故

$$\frac{d}{dx}(\text{Sgn}x) = 2H'(x) = 2\delta(x) \qquad (-\infty < x < +\infty) \quad (1\text{-}44)$$

不难看出，(1-44) 式其实也可借助于例 1.11 的结论直接得到.

例 1.14 设脉冲函数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x < a \text{ 时} \\ C & \text{当 } a \leqslant x \leqslant b \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x > b \text{ 时} \end{cases}$$

其中 $C > 0$ 为常数(如图 1-3 所示). 则

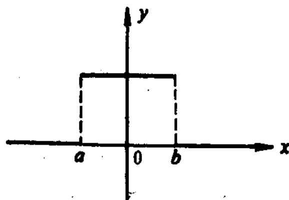


图 1-3

$$f(x) = \begin{cases} CH(x-a) - CH(x-b) & \text{当 } x \neq b \text{ 时} \\ C & \text{当 } x = b \text{ 时} \end{cases}$$

于是

$$f'(x) = CH'(x-a) - CH'(x-b) = C\delta(x-a) - C\delta(x-b)$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

例 1.15　设阶梯函数

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{当 } x<-1 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } -1<x<0 \text{ 时}\\ 2 & \text{当 } 0<x<2 \text{ 时}\\ 5 & \text{当 } x>2 \text{ 时}\end{cases}$$

(如图 1-4 所示). 则当 $x\neq -1,0,2$ 时,

$$f(x)=-1+H(x+1)+2H(x)+3H(x-2)$$

于是

$$f'(x)=\delta(x+1)+2\delta(x)+3\delta(x-2)\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

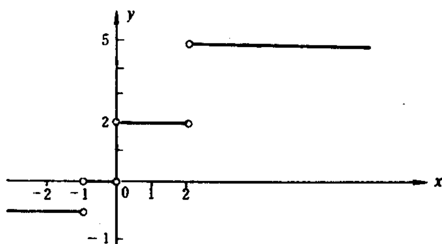


图 1-4

需要指出,上述诸例中函数微商的等式,都应该看成是在弱意义下相等. 因为在这些例子中,都是用属于广义函数的 δ-函数来表达所论间断函数的微商,从而也只能是在弱相等的意义下来理解这些等式.

例 1.16　设

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & \text{当 } x<\xi \text{ 时}\\ f_2(x) & \text{当 } x>\xi \text{ 时}\end{cases}$$

其中 $f_1(x)$和 $f_2(x)$分别于 $x<\xi$ 和 $x>\xi$ 内可微,且 $f_1'(\xi-0)$与 $f_2'(\xi+0)$都存在. 求这个函数的导数.

解　因为 $f_2'(\xi+0)$与 $f_1'(\xi-0)$都存在,则易见 $f_1(\xi-0)$与 $f_2(\xi$

$+0)$都存在，亦即 $f(\xi-0)$与 $f(\xi+0)$存在. 所以，$x=\xi$ 是 $f(x)$的第一类间断点. 此例中的函数与例题 1.11 中的函数的唯一区别，就在于例 1.11 中的函数 $f(x)$的间断点 $x=\xi$ 处，有 $f'(\xi-0)=f'(\xi+0)$，而对于本例中的函数 $f(x)$则未必如此，不过，我们仍可象例题 1.11 那样，记 $C=f(\xi+0)-f(\xi-0)$，并定义

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{当 } x<\xi \text{ 时} \\ f_1(\xi-0) & \text{当 } x=\xi \text{ 时} \\ f_2(x)-C & \text{当 } x>\xi \text{ 时} \end{cases}$$

本来，$\tilde{f}(x)$于 $x=\xi$ 处取何值以及是否有定义，对于下面表达 $f'(x)$来说是无所谓的. 这里之所以规定 $\tilde{f}(\xi)=f_1(\xi-0)$，不过是为了与例 1.11 在处理上统一而已. 由于当 $x>\xi$ 与 $x<\xi$ 时，

$$f(x)=\tilde{f}(x)+CH(x-\xi)$$

故当 $-\infty<x<+\infty$时，应有

$$f'(x)=\tilde{f}'(x)+C\delta(x-\xi) \tag{1-45}$$

然而，由于此时未必有$\tilde{f}'(\xi-0)=\tilde{f}'(\xi+0)$，因此或者规定

$$\tilde{f}'(\xi)=\tilde{f}'(\xi-0) \tag{1-46}$$

或者规定

$$\tilde{f}'(\xi)=\tilde{f}'(\xi+0) \tag{1-47}$$

这样一来，(1-45)式就有两种形式. 这两种形式也只在 $x=\xi$ 处有区别，即或者取(1-46)式，或者取(1-47)式. 鉴于前面已指出，(1-45)式应当按着在弱意义下相等来理解，因此上述两种形式采取任何一种均可. 基于同样理由，于(1-45)式中往往干脆就不特别指明$\tilde{f}'(x)$在点 ξ 处究竟取何值. 由于

$$\tilde{f}'(x)=\begin{cases} f_1'(x) & \text{当 } x<\xi \text{ 时} \\ f'_2(x) & \text{当 } x>\xi \text{ 时} \end{cases}$$

于是，当$-\infty<x<+\infty$时，

$$f'(x)=C\delta(x-\xi)+\begin{cases} f'_1(x) & \text{当 } x<\xi \text{ 时} \\ f'_2(x) & \text{当 } x>\xi \text{ 时} \end{cases} \tag{1-48}$$

对于本例中的函数 $f(x)$，其导函数最常用的表达式就是(1-48)式.

例 1.17 设

$$f(x)=\begin{cases}2\sin x & \text{当 } x<\pi \text{ 时}\\ -x^2 & \text{当 } x>\pi \text{ 时}\end{cases}$$

则 $f(x)$ 符合例 1.16 的全部要求，而

$$C=f(\pi+0)-f(\pi-0)=-\pi^2$$

于是，根据例 1.16 所述的结论，当 $-\infty<x<+\infty$ 时，或者

$$f'(x)=-\pi^2\delta(x-\pi)+\begin{cases}2\cos x & \text{当 } x\leqslant\pi \text{ 时}\\ -2x & \text{当 } x>\pi \text{ 时}\end{cases}$$

或者

$$f'(x)=-\pi^2\delta(x-\pi)+\begin{cases}2\cos x & \text{当 } x<\pi \text{ 时}\\ -2x & \text{当 } x\geqslant\pi \text{ 时}\end{cases}$$

或者采取常用的表达式，即当 $-\infty<x<+\infty$ 时，

$$f'(x)=-\pi^2\delta(x-\pi)+\begin{cases}2\cos x & \text{当 } x<\pi \text{ 时}\\ -2x & \text{当 } x>\pi \text{ 时}\end{cases}$$

例 1.18 设 $a<\alpha<\beta<b$，

$$f(x)=\begin{cases}e^x & \text{当 } a\leqslant x<\alpha \text{ 时}\\ x^3+2 & \text{当 } \alpha<x<\beta \text{ 时}\\ x^3 & \text{当 } \beta<x\leqslant b \text{ 时}\end{cases}$$

为求定义于有限区间 $[a,b]$ 上的间断函数 $f(x)$ 的导数，先将 $f(x)$ 开拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上，使之除 α，β 为第一类间断点外，处处可微. 为此，设

$$F(x)=\begin{cases}e^x & \text{当 } x<\alpha \text{ 时}\\ x^3+2 & \text{当 } \alpha<x<\beta \text{ 时}\\ x^3 & \text{当 } x>\beta \text{ 时}\end{cases}$$

由于 $F(x)$ 于间断点 α,β 处的跃度分别为

$$F(\alpha+0)-F(\alpha-0)=\alpha^3+2-e^\alpha$$

$$F(\beta+0)-F(\beta-0)=-2$$

因此，若记

$$\tilde{F}(x)=\begin{cases}e^x & \text{当 } x\leqslant\alpha \text{ 时}\\ x^3+e^\alpha-\alpha^3 & \text{当 } x>\alpha \text{ 时}\end{cases}$$

则当 $x\neq\alpha,\beta$ 时，

$$F(x)=\tilde{F}(x)+(\alpha^3+2-e^\alpha)H(x-\alpha)-2H(x-\beta)$$

从而，当 $-\infty<x<+\infty$ 时

$$F'(x)=\tilde{F}'(x)+(\alpha^3+2-e^\alpha)\delta(x-\alpha)-2\delta(x-\beta)$$

特别，当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，此式成立. 这就表明，或者

$$f'(x)=(\alpha^3+2-e^\alpha)\delta(x-\alpha)-2\delta(x-\beta)+\begin{cases} e^x & \text{当 } a\leqslant x\leqslant \alpha \text{ 时} \\ 3x^2 & \text{当 } \alpha< x\leqslant b \text{ 时}\end{cases}$$

或者

$$f'(x)=(\alpha^3+2-e^\alpha)\delta(x-\alpha)-2\delta(x-\beta)+\begin{cases} e^x & \text{当 } a\leqslant x< \alpha \text{ 时} \\ 3x^2 & \text{当 } \alpha\leqslant x\leqslant b \text{ 时}\end{cases}$$

或者通常表示为

$$f'(x)=(\alpha^3+2-e^\alpha)\delta(x-\alpha)-2\delta(x-\beta)+\begin{cases} e^x & \text{当 } a\leqslant x< \alpha \text{ 时} \\ 3x^2 & \text{当 } \alpha< x\leqslant b \text{ 时}\end{cases}$$

至此，对于一般在有限或无穷区间上有定义的，除第一类间断点之外处处可微的间断函数，我们都能够借助于 δ-函数，给出其导数的表达式.

§1.5 δ-函数的性质

δ-函数之所以有着广泛的应用，其主要原因之一是它有许多很好的性质. 如前所述，为了使本书具有更广泛的适应性，便于读者接受，对于本来属于广义函数的 δ-函数的下述诸性质，在本节我们都只采取古典分析中的方法，给出形式上的"证明".

首先，根据 δ-函数的定义(并注意其物理背景)，立即可得如下的性质：

性质 1.1 对于任意区间$[a,b]$，恒有

$$\int_a^b \delta(x-\xi)d\xi = \begin{cases} 1 & \text{当 } \xi \in [a,b] \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } \xi \overline{\in} [a,b] \text{ 时} \end{cases}$$

今后我们将以定义 1.1 至定义 1.3 这三个等价的定义之一作为 δ-函数的定义，而将定义 1.4 视为其运算性质，即

性质 1.2（运算性质） 设 $f(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-\xi)dx = f(\xi)$$

证明 根据 δ-函数的定义、积分中值定理以及性质 1.1 知，对任意 $\varepsilon>0$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-\xi)dx = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f(x)\delta(x-\xi)dx$$

$$= f(\eta)\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(x-\xi)dx = f(\eta)$$

其中 $\eta\in[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]$. 注意 $f(x)$ 的连续性及 $\varepsilon>0$ 的任意性，立即可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-\xi)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f(x)\delta(x-\xi)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(\eta) = f(\xi)$$

推论 1.1 设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续，则当 $\xi\in[a,b]$ 时，

$$\int_a^b f(x)\delta(x-\xi)dx = f(\xi)$$

证明 设

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a) & \text{当 } x<a \text{ 时} \\ f(x) & \text{当 } a\leqslant x\leqslant b \text{ 时} \\ f(b) & \text{当 } x>b \text{ 时} \end{cases}$$

则 $\tilde{f}(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续．于是，按 δ-函数的定义及性质 1.1，并注意到 $\xi\in[a,b]$，便有

$$\int_a^b f(x)\delta(x-\xi)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(x)\delta(x-\xi)dx = \tilde{f}(\xi) = f(\xi)$$

性质 1.3（δ-函数的微商） 设 $f(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上 n 次连续可微，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-\xi)dx = (-1)^n f^{(n)}(\xi)$$

证明 用数学归纳法证明之.

显然当 $n=1$ 时，结论成立. 事实上，由分部积分法以及性质 1.2，并注意到当 $x\neq\xi$ 时，$\delta(x-\xi)=0$，便得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-\xi)dx = f(x)\delta(x-\xi)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x-\xi)dx$$
$$= -f'(\xi)$$

今假设当 $n=k$ 时，结论成立，亦即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^{(k)}(x-\xi)dx = (-1)^k f^{(k)}(\xi)$$

要证当 $n=k+1$ 时，结论成立. 事实上，由分部积分法以及性质 1.2，并注意到当 $x\neq\xi$ 时，$\delta^{(k)}(x-\xi)=0$，便得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^{(k+1)}(x-\xi)dx = f(x)\delta^{(k)}(x-\xi)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta^{(k)}(x-\xi)dx$$
$$= (-1)(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}[f'(x)]\Big|_{x=\xi}$$
$$= (-1)^{k+1} f^{(k+1)}(\xi)$$

于是，根据数学归纳法原理便知，所述结论对任何自然数 n 都成立.

推论 1.2 设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上 n 次连续可微，则当 $\xi\in[a,b]$ 时，

$$\int_a^b f(x)\delta^{(n)}(x-\xi)dx = (-1)^n f^{(n)}(\xi)$$

证明 将 $f(x)$ n 次连续可微地延拓到 $(-\infty,+\infty)$，设如此延拓后的函数为 $\tilde{f}(x)$，则由 $\tilde{f}^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(\xi)$ 及性质 1.3 立即可知，当 $\xi\in[a,b]$ 时，

$$\int_a^b f(x)\delta^{(n)}(x-\xi)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)\delta^{(n)}(x-\xi)dx$$
$$= (-1)^n \tilde{f}^{(n)}(\xi) = (-1)^n f^{(n)}(\xi)$$

为了加深对 δ-函数微商的意义的理解，这里我们简要地叙述一下 $\delta'(x)$ 的物理背景.

设于 x 轴上，只在 $x=0$ 与 $x=l$ 处分别置以电量为 $-Q$ 与 Q 的电荷，从而形成偶极矩为 $P=Ql$ 的偶极子. 于是仿 § 1.3 中的例 1.9 可知，此时 x 轴上各点 x 处的电荷分布密度为

$$\rho(x) = -Q\delta(x) + Q\delta(x-l) = P\frac{\delta(x-l)-\delta(x)}{l}$$

固定偶极矩 P，令 $l\to 0$，则由 $P=Ql$ 知，此时 $Q\to+\infty$. 记

$$\tilde{\rho}(x) = \lim_{l\to 0}\left(P\frac{\delta(x-l)-\delta(x)}{l}\right) = -P\delta'(x)$$

则得

$$\delta'(x) = \frac{\tilde{\rho}(x)}{-P}$$

而 $\tilde{\rho}(x)$ 则表示由在点 $x=0$ 处及与该点无限靠近的点处分别置以等量但符号相反的无穷大电荷形成偶极子后，在 x 轴上各点的电荷密度分布.

推论 1.3

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(x-\xi)dx = 0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

而且，对任何区间 $[a,b]$，恒有

$$\int_{a}^{b}\delta^{(n)}(x-\xi)dx = 0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

证明 在性质 1.3 及推论 1.2 中，取 $f(x)\equiv 1$，便立即得到所要证明的结论.

在下述性质及其推论中所出现的等式，除了推论 1.5 之外，都应当按弱意义下相等来理解. 此外，本节所叙述的在闭区间 $[a,b]$ 上成立的所有性质及其推论，将 $[a,b]$ 换成开区间 (a,b) 显然也成立.

性质 1.4 设 n 为非负整数，则

$$\delta^{(n)}(-x) = (-1)^n\delta^{(n)}(x) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

其中

$$\delta^{(n)}(-x) = \frac{d^n\delta(-x)}{d(-x)^n}$$

证明 令 $u=-x$，则由性质 1.3 知，对任一于 $(-\infty,+\infty)$ 上 n 次连续可微的函数 $f(x)$，恒有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta^{(n)}(-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}f(-u)\delta^{(n)}(u)du$$

$$= (-1)^n\frac{d^n f(-u)}{du^n}\bigg|_{u=0} = (-1)^n(-1)^n f^{(n)}(x)\big|_{x=0}$$

$$=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta^{(n)}(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)[(-1)^n\delta^{(n)}(x)]dx$$

于是，按定义 1.7 及其后所作的说明，立即可见（在弱意义下）

$$\delta^{(n)}(-x)=(-1)^n\delta^{(n)}(x)\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

性质 1.4 表明，当 n 为偶数时，$\delta^{(n)}(x)$是偶函数；当 n 为奇数时，$\delta^{(n)}(x)$为奇函数. 特别，$\delta(x)$为偶函数，$\delta'(x)$为奇函数，这两种情形以后将经常用到.

推论 1.4 设 n 为非负整数，则

$$\delta^{(n)}(\xi-x)=(-1)^n\delta^{(n)}(x-\xi)\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

其中

$$\delta^{(n)}(\xi-x)=\frac{d^n\delta(\xi-x)}{d(\xi-x)^n}$$

证明 作平移变换 $u=\xi-x$，则由性质 1.4 便可立即得证.

由性质 1.3、推论 1.2 及推论 1.4 不难得到如下推论：

推论 1.5 设 $f(x)$于$(-\infty,+\infty)$上 n 次连续可微，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta^{(n)}(\xi-x)dx=f^{(n)}(\xi)$$

若 $f(x)$于$[a,b]$上 n 次连续可微，则当 $\xi\in[a,b]$时，

$$\int_a^b f(x)\delta^{(n)}(\xi-x)dx=f^{(n)}(\xi)$$

性质 1.5 设 $\varphi(x)$于$(-\infty,+\infty)$上连续可微，且 $\varphi(x)=0$ 无重根，其全部单根为 $x_1,x_2,\cdots x_n$，则

$$\delta[\varphi(x)]=\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta(x-x_k)}{|\varphi'(x_k)|}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

证明 按假设可知

$$\varphi'(x_k)\neq 0\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

再根据 $\varphi'(x)$的连续性，存在 $\varepsilon_k>0(k=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\varphi'(x)\neq 0\qquad(x_k-\varepsilon\leqslant x\leqslant x_k+\varepsilon)\tag{1-49}$$

且使诸区间$[x_k-\varepsilon_k,x_k+\varepsilon_k](k=1,2,\cdots,n)$中任意两个区间皆无公共点. 于是由 δ-函数的定义知，对任一在$(-\infty,+\infty)$上连续的函数 $f(x)$，恒有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_k-\varepsilon_k}^{x_k+\varepsilon_k} f(x)\delta[\varphi(x)]dx \qquad (1\text{-}50)$$

令 $u=\varphi(x)$，由(1-49)式知，若设 $\tilde{u}_k=\varphi(x_k-\varepsilon)$，$\tilde{\tilde{u}}_k=\varphi(x_k+\varepsilon)$，则 $u=\varphi(x)$ 的反函数于以 $\tilde{u}_k$，$\tilde{\tilde{u}}_k$ 为端点的区间上存在，记为 $x=\varphi^{-1}(u)$. 若 $\varphi'(x)>0(x_k-\varepsilon\leqslant x\leqslant x_k+\varepsilon)$，则 $\varphi(x_k+\varepsilon)>\varphi(x_k-\varepsilon)$，再注意到 $\varphi(x_k)=0$，便有

$$\int_{x_k-\varepsilon_k}^{x_k+\varepsilon_k} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = \int_{\varphi(x_k-\varepsilon_k)}^{\varphi(x_k+\varepsilon_k)} f[\varphi^{-1}(u)]\delta(u)\frac{d\varphi^{-1}(u)}{du}du$$

$$= f[\varphi^{-1}(u)]\frac{d\varphi^{-1}(u)}{du}\bigg|_{u=\varphi(x_k)} = f(x)\frac{1}{\varphi'(x)}\bigg|_{x=x_k} = \frac{f(x_k)}{|\varphi'(x_k)|}$$

若 $\varphi'(x)<0(x_k-\varepsilon\leqslant x\leqslant x_k+\varepsilon)$，则 $\varphi(x_k+\varepsilon)<\varphi(x_k-\varepsilon)$，从而

$$\int_{x_k-\varepsilon_k}^{x_k+\varepsilon_k} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = -\int_{\varphi(x_k-\varepsilon_k)}^{\varphi(x_k-\varepsilon_k)} f[\varphi^{-1}(u)]\delta(u)\frac{d\varphi^{-1}(u)}{du}du$$

$$= -f[\varphi^{-1}(u)]\frac{d\varphi^{-1}(u)}{du}\bigg|_{u=\varphi(x_k)}$$

$$= -f(x)\frac{1}{\varphi'(x)}\bigg|_{x=x_k} = \frac{f(x_k)}{|\varphi'(x_k)|}$$

于是，当 $k=1,2,\cdots,n$ 时，恒有

$$\int_{x_k-\varepsilon_k}^{x_k-\varepsilon_k} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = \frac{f(x_k)}{|\varphi'(x_k)|}$$

将此式代入(1－50)式，并由性质 1.2 可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|\varphi'(x_k)|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_k)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta(x-x_k)}{|\varphi'(x_k)|}dx$$

从而，按定义 1.7 可知(在弱意义下)

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_{k=1}^{n}\frac{\delta(x-x_k)}{|\varphi'(x_k)|} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

推论 1.6 设 $\varphi(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续可微，且 $\varphi(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上无重根，其全部单根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_{k=1}^{n}\frac{\delta(x-x_k)}{|\varphi'(x_k)|} \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

证明 首先将 $\varphi(x)$ 连续可微地延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上，使之于 $x\overline{\in}[a,b]$ 处恒不为零. 设如此延拓后所得到的函数为 $\tilde{\varphi}(x)$. 则由假设条件以及 $\tilde{\varphi}(x)$ 的属性，根据性质 1.5 可知(在弱意义下)

$$\delta[\tilde{\varphi}(x)]=\sum_{k=1}^{s}\frac{\delta(x-x_k)}{|\tilde{\varphi}'(x_k)|}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

从而

$$\delta[\varphi(x)]=\sum_{k=1}^{s}\frac{\delta(x-x_k)}{|\varphi'(x_k)|}\qquad(a\leqslant x\leqslant b)$$

显然性质 1.5 还有如下的重要推论：

推论 1.7 设 a 为非零常数，则

1° $\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|}\delta(x)$

2° $\delta(x^2-a^2)=(2|a|)^{-1}[\delta(x+a)+\delta(x-a)]$

性质 1.6 设 $\varphi(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微，则

$$\varphi(x)\delta'(x-\xi)=\varphi(\xi)\delta'(x-\xi)-\varphi'(\xi)\delta(x-\xi)$$
$$(-\infty<x<+\infty)$$

证明 根据分部积分公式以及性质 1.2、性质 1.3 知，对任一于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微的函数 $f(x)$，恒有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\delta'(x-\xi)f(x)dx=\delta(x-\xi)\varphi(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)(\varphi(x)f(x))'dx$$
$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\varphi'(x)f(x)dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\varphi(x)f'(x)dx$$
$$=-\varphi'(\xi)f(\xi)-\varphi(\xi)f'(\xi)$$
$$=-\varphi'(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-\xi)dx+\varphi(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta'(x-\xi)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)[\varphi(\xi)\delta'(x-\xi)-\varphi'(\xi)\delta(x-\xi)]dx$$

于是

$$\varphi(x)\delta'(x-\xi)=\varphi(\xi)\delta'(x-\xi)-\varphi'(\xi)\delta(x-\xi)$$
$$(-\infty<x<+\infty)$$

推论 1.8

$$x\delta'(x-\xi)=\xi\delta'(x-\xi)-\delta(x-\xi)$$

特别，当 $\xi=0$ 时，

$$x\delta'(x)=-\delta(x)$$

证明 于性质 1.6 中，取 $\varphi(x)=x$，便立即得证.

性质 1.7 设 $\varphi(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则

$$\varphi(x)\delta(x-\xi)=\varphi(\xi)\delta(x-\xi)\qquad(-\infty<x<+\infty)\tag{1-51}$$

证明 对任一于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$，按性质 1.2 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\delta(x-\xi)dx=f(\xi)\varphi(\xi)=\varphi(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-\xi)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(\xi)\delta(x-\xi)dx$$

由此可见，等式(1-51)在弱意义下成立.

推论 1.9

$$(x-\xi)\delta(x-\xi)=0\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

特别，当 $\xi=0$ 时，

$$x\delta(x)=0\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

证明 于性质 1.7 中，取 $\varphi(x)=x$，便立即得证.

推论 1.10 设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 皆于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 若存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $\varphi(\xi)=\psi(\xi)$，则

$$\varphi(x)\delta(x-\xi)=\psi(x)\delta(x-\xi)\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

证明 由性质 1.7 可得

$$\varphi(x)\delta(x-\xi)=\varphi(\xi)\delta(x-\xi)=\psi(\xi)\delta(x-\xi)$$
$$=\psi(x)\delta(x-\xi)\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

仿性质 1.6，我们还可以证明如下的性质：

性质 1.8 设 $\varphi(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上 n 次连续可微，则

$$\varphi(x)\delta^{(n)}(x-\xi)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\varphi^{(k)}(\xi)\delta^{(n-k)}(x-\xi)$$
$$(-\infty<x<+\infty)$$

其中 C_n^k 表示在 n 个元素中取 k 个元素的组合总数.

显而易见,性质 1.7 与性质 1.6 分别是性质 1.8,当 $n=0$ 与 $n=1$ 时的特殊情形.

性质 1.9 设函数

$$H(x-\xi)=\begin{cases}0 & \text{当 } x<\xi \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } x\geqslant\xi \text{ 时}\end{cases}$$

则

$$H'(x-\xi)=\delta(x-\xi)\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

性质 1.10 设函数

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & \text{当 } x<\xi \text{ 时}\\ f_2(x) & \text{当 } x>\xi \text{ 时}\end{cases}$$

其中 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 分别于 $x<\xi$ 与 $x>\xi$ 内可微,且 $f'_1(\xi-0)$ 与 $f'_2(\xi+0)$ 皆存在.若记

$$C=f(\xi+0)-f(\xi-0)$$

则当 $-\infty<x<+\infty$ 时,

$$f'(x)=C\delta(x-\xi)+\begin{cases}f'_1(x) & \text{当 } x<\xi \text{ 时}\\ f'_2(x) & \text{当 } x>\xi \text{ 时}\end{cases}$$

性质 1.9 及性质 1.10 已分别在 §1.4 中 1.4.2 段的开头及例 1.16 中详细推导过,这里只是为了把 δ-函数的性质阐述得更完整,才又将它们开列出来.

§1.6 高维 δ-函数

如果所论 δ-函数中含有 n 个自变量,则称之为 n 维 δ-函数.前面所讨论的函数 $\delta(x-\xi)$,只含一个自变量 x,称之为一维 δ-函数.高于一维的 δ-函数,也称为高维 δ-函数.

鉴于高维 δ-函数与一维 δ-函数有许多类似之处,因此下面只是扼要地进行讨论.

1.6.1 高维 δ-函数的定义

为了解高维 δ-函数的定义的背景，我们先举两个具体的例子.

例 1.19 设在三维空间 $oxyz$ 中，除原点 $(0,0,0)$ 外的其余各点处都没有电荷分布，而于原点处分布一单位电荷，试确定 $oxyz$ 空间中各点 (x,y,z) 处的电荷分布密度 $\rho(x,y,z)$.

设 G 为 $oxyz$ 空间中的某有界闭区域，Q_G 表示分布于 G 上的电荷总量，S_G 表示域 G 的体积. 若令 l 表示 G 的直径，即 G 上任意两点间距离之最大者，则显然有

$$\rho(0,0,0) = \lim_{\substack{l\to 0\\(0,0,0)\in G}} \frac{Q_G}{S_G} = \lim_{\substack{l\to 0\\(0,0,0)\in G}} \frac{1}{S_G} = \infty$$

而当 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 时，

$$\rho(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y,z)\in G\\(0,0,0)\notin G}} \frac{Q_G}{S_G} = \lim_{\substack{l\to 0\\(x,y,z)\in G\\(0,0,0)\notin G}} \frac{0}{S_G} = 0$$

于是，在 $oxyz$ 空间中各点 (x,y,z) 的电荷分布密度为

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{当}(x,y,z)\neq(0,0,0)\text{ 时} \\ \infty & \text{当}(x,y,z)=(0,0,0)\text{ 时} \end{cases}$$

此外，显然还有

$$Q_{R^3} = \iiint_{R^3} \rho(x,y,z)dxdydz = 1$$

其中 R^3 为整个三维空间*.

例 1.20 设在三维空间 $oxyz$ 中除点 (ξ,η,ζ) 外的其余各点处都没有物质分布，而于点 (ξ,η,ζ) 处分布一单位质量的物质，试确定 $oxyz$ 空间中各点 (x,y,z) 处的物质分布密度 $\mu(x,y,z)$.

设 G 为 $oxyz$ 空间中的某有界闭区域，S_G 为域 G 的体积，M_G 为分布于 G 上的物质的总质量. 若令 l 表示域 G 的直径，则有

$$\mu(\xi,\eta,\zeta) = \lim_{\substack{l\to 0\\(\xi,\eta,\zeta)\in G}} \frac{M_G}{S_G} = \lim_{\substack{l\to 0\\(\xi,\eta,\zeta)\in G}} \frac{1}{S_G} = \infty$$

---

* 常记 R^n 表示整个 n 维欧氏空间.

当$(x,y,z)\neq(\xi,\eta,\zeta)$时

$$\mu(x,y,z)=\lim_{\substack{l\to 0\\(x,y,z)\in G\\(\xi,\eta,\zeta)\notin G}}\frac{M_G}{S_G}=\lim_{\substack{l\to 0\\(x,y,z)\in G\\(\xi,\eta,\zeta)\notin G}}\frac{0}{S_G}=0$$

于是，$oxyz$ 空间中各点(x,y,z)的物质分布密度为

$$\mu(x,y,z)=\begin{cases}0 & \text{当}(x,y,z)\neq(\xi,\eta,\zeta)\text{时}\\ \infty & \text{当}(x,y,z)=(\xi,\eta,\zeta)\text{时}\end{cases}$$

此外，显然还有

$$M_{R^3}=\iiint\limits_{R^3}\mu(x,y,z)dxdydz=1$$

将诸如例 1.19 与例 1.20 中的那些具有明显的共性——反映了集中分布的物理量的物理特性的函数 $\rho(x,y,z)$与 $\mu(x,y,z)$加以数学抽象，引进下述定义：

定义 1.8 我们称一个含有 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数为 n 维 δ-函数，并记之为 $\delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，如果它满足：

1° $$\delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}0 & \text{当}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq(0,0,\cdots,0)\text{时}\\ \infty & \text{当}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(0,0,\cdots,0)\text{时}\end{cases}$$

2° $$\iint\limits_{R^n}\cdots\int\delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n=1$$

只须作一个平移变换，便可得到与定义 1.8 等价的如下定义：

定义 1.9 我们称一个含有 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数为 n 维 δ-函数，并记为 $\delta(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\cdots,x_n-\xi_n)$，如果它满足：

1° $$\delta(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\cdots,x_n-\xi_n)=$$
$$=\begin{cases}0 & \text{当}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\text{时}\\ \infty & \text{当}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\text{时}\end{cases}$$

2° $$\iint\limits_{R^n}\cdots\int\delta(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\cdots,x_n-\xi_n)dx_1dx_2\cdots dx_n=1$$

运用简单的推理，便不难得到与定义 1.8 及定义 1.9 等价的如下定义：

定义 1.10 我们称一个含有 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数为 n 维 δ-函数，并记为 $\delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，如果它满足：

1° $\delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 当$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq(0,0,\cdots,0)$时

$$2^\circ \iint\limits_{R^n}\cdots\int \delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n = 1$$

由上述诸定义可见，n 维 δ-函数显然是一维 δ-函数的推广，并且，高维 δ-函数，自然也不是古典分析中的那种“逐点对应”的普通函数.

我们还可以给出与上述三个定义等价的下述定义，它也是 n 维 δ-函数重要的运算性质.

定义 1.11 我们称 $\delta(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\cdots,x_n-\xi_n)$ 为 n 维 δ-函数，如果对任一于 R^n 内连续的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，恒有

$$\iint\limits_{R^n}\cdots\int \delta(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\cdots,x_n-\xi_n)f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$= f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

1.6.2 高维 δ-函数的性质

为了讨论高维 δ-函数的性质，首先，需要介绍多元函数弱收敛的概念.

一、多元函数弱收敛的概念

n 元函数弱收敛与一元函数弱收敛的定义非常相似，只不过是把那里的一元函数换成 n 元函数，把定积分换成 n 重积分而已. 因此，n 元函数弱收敛的定义，其实也是一元函数弱收敛定义的推广.

定义 1.12 设依赖于参数 h 的函数族 $\{\varphi_h(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$ 中的每一个函数都在 R^n 中某域 G 内有定义. 若对任一于 G 内连续的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，恒有

$$\lim_{h\to\infty}\iint\limits_{G}\cdots\int f(x_1,x_2\cdots,x_n)\varphi_h(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$= \iint\limits_{G}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

则称函数族 $\{\varphi_h(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$ 当 $h\to\infty$ 时在 G 内弱收敛于 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，或者称 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是函数族 $\{\varphi_h(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$ 于 G 内当 $h\to\infty$ 时的弱极限，记为

$$\lim_{h\to\infty}\varphi_h(x_1,x_2,\cdots,x_n) \overset{\text{弱}}{=} \varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in G$$

或者

$$\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)\underset{k\to\infty}{\overset{\text{弱}}{\Rightarrow}}\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in G$$

此定义自然也有类似于定义 1.5 的附加说明 1°至 4°，且应变通之处也都十分明显，故不再赘述. 据此及定义 1.11 显然有如下结论：

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)\overset{\text{弱}}{=}\delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$$

的充分必要条件为对任一在 R^n 内连续的有界函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，恒有

$$\lim_{k\to\infty}\iint_{R^n}\cdots\int\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n=f(0,0,\cdots,0)$$

值得注意的是：

(1)若上述定义中的 G 为 R^n，则根据所论问题的要求，有时对函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$除假设其连续外，还要加上有界性的限制条件；

(2)对函数族$\{\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$所依赖的参数 k，则与定义 1.5 的附加说明 2°类似，这里不再重述.

上述充要条件提供了讨论 n 元函数族以 n 维 δ-函数为弱极限的具体方法. 下面给出几个例子来进一步说明这种方法的运用.

例 1.21 设脉冲函数

$$S_\varepsilon(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\varepsilon^2} & \text{当 } \sqrt{x^2+y^2}\leqslant\varepsilon \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } \sqrt{x^2+y^2}>\varepsilon \text{ 时}\end{cases}$$

试证明

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}S_\varepsilon(x,y)\overset{\text{弱}}{=}\delta(x,y)\qquad(x,y)\in R^2$$

证明 按 $S_\varepsilon(x,y)$的定义和二重积分的中值定理知，对任一于 R^2 上连续的函数 $f(x,y)$，有

$$\iint_{R^2}S_\varepsilon(x,y)f(x,y)dxdy=\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\varepsilon}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}f(x,y)dxdy=f(\xi,\eta)$$

其中，$\sqrt{\xi^2+\eta^2}\leqslant\varepsilon$. 于是，由 $f(x,y)$的连续性便得

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\iint_{R^2}S_\varepsilon(x,y)f(x,y)dxdy=\lim_{\varepsilon\to0^+}f(\xi,\eta)=f(0,0)$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} S_\varepsilon(x,y) \overset{\text{弱}}{=} \delta(x,y) \qquad (x,y)\in R^2$$

例 1.22 设以 ε 为半径的 n 维球形函数

$$J_\varepsilon(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}(\varepsilon^n r)^{-1}\exp\left[\dfrac{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}{\varepsilon^2-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\right] \\ \qquad\qquad\qquad \text{当}\ \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}<\varepsilon\ \text{时} \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{当}\ \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\geqslant\varepsilon\ \text{时}\end{cases}$$

其中

$$r=\underset{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}<1}{\iint\cdots\int}\exp\left[\frac{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}{1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\right]dx_1dx_2\cdots dx_n$$

试证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} J_\varepsilon(x_1,x_2,\cdots,x_n) \overset{\text{弱}}{=} \delta(x_1,x_2,\cdots,x_n) \qquad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$$

证明 按 $J_\varepsilon(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的定义及积分中值定理可知,对任一于 R^n 内连续的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,恒有

$$\underset{R^n}{\iint\cdots\int} J_\varepsilon(x_1,x_2,\cdots,x_n)f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\underset{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}<\varepsilon}{\iint\cdots\int} J_\varepsilon(x_1,x_2,\cdots,x_n)f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\underset{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}<\varepsilon}{\iint\cdots\int}\frac{1}{\varepsilon^n r}$$

$$\cdot\exp\left[\frac{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}{\varepsilon^2-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\right]dx_1dx_2\cdots dx_n$$

其中 $\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2}<\varepsilon$. 设 $\dfrac{x_k}{\varepsilon}=u_k(k=1,2,\cdots,n)$,则

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-}\underset{R^n}{\iint\cdots\int} J_\varepsilon(x_1,x_2,\cdots,x_n)f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\frac{1}{r}\underset{\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}<1}{\iint\cdots\int}\cdots$$

$$\int \exp\left[\frac{-(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2)}{1-(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2)}\right]du_1du_2\cdots du_n$$

$$=\lim_{t\to 0^+} f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=f(0,0,\cdots,0)$$

从而，本例结论得证.

例 1.28 设 n 维空间 R^n 内的开尔文 Kelvin 热源函数为

$$\Phi_t(x_1,x_2,\cdots,x_n,\xi_1,\cdots,\xi_n)=\frac{1}{a^n(\pi t)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{(x_1-\xi_1)^2+\cdots+(x_n-\xi_n)^2}{a^2t}\right]\quad(t>0)$$

其中 a 为正常数. 试证明 .

$$\lim_{t\to 0^+}\Phi_t(x_1,\cdots,x_n,\xi_1,\cdots,\xi_n)\overset{弱}{=}\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)$$

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$$

证明 显然，我们只须证明对任一于 R^n 内连续的有界函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，恒有

$$\lim_{t\to 0^+}\iint\limits_{R^n}\cdots\int\Phi_t(x_1,x_2,\cdots,x_n,\xi_1,\cdots,\xi_n)f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\qquad(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$$

即可. 为此，令

$$u_k=\frac{x_k-\xi_k}{a\sqrt{t}}\qquad(k=1,2,\cdots,n)\tag{1-52}$$

则，对任一 $t>0$，恒有

$$\iint\limits_{R^n}\cdots\int\Phi_t(x_1,x_2,\cdots,x_n,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\frac{1}{\pi^{n/2}}\iint\limits_{R^n}\cdots\int e^{-(u_1^2+\cdots+u_n^2)}du_1\cdots du_n$$

$$=\frac{1}{\pi^{n/2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u_1^2}du_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u_2^2}du_2\right)\cdots\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u_n^2}du_n\right)$$

$$=\frac{1}{\pi^{n/2}}\cdot\underbrace{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}\cdots\sqrt{\pi}}_{n个}=1\tag{1-53}$$

于是，为证明本例的结论，又只须证明

$$\lim_{t\to 0^+}\iint\limits_{R^n}\cdots\int \Phi_t(x_1,x_2,\cdots,x_n,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

$$\cdot[f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)]dx_1dx_2\cdots dx_n=0 \quad (1\text{-}54)$$

因为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 于 R^n 上连续，所以对固定的 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n$ 而言，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_0>0$，使得当 $\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+\cdots+(x_n-\xi_n)^2}\leqslant\delta_0$ 时，

$$|f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (1\text{-}55)$$

又由于 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 于 R^n 上有界，所以存在 $M>0$，使得

$$|f(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\leqslant M \qquad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$$

据此，并由(1-52)、(1-53)、(1-54)可得

$$\left|\iint\limits_{R^n}\cdots\int \Phi_t(x_1,\cdots,x_n,\xi_1,\cdots,\xi_n)[f(x_1,\cdots,x_n)-f(\xi_1,\cdots,\xi_n)]dx_1\cdots dx_n\right|$$

$$\leqslant\iint\limits_{r\leqslant\delta_0}\cdots\int \Phi_t(x_1,\cdots,x_n,\xi_1,\cdots,\xi_n)\left|f(x_1\cdots x_n)-f(\xi_1\cdots\xi_n)\right|dx_1\cdots dx_n$$

$$+\iint\limits_{r>\delta_0}\cdots\int \Phi_t(x_1,\cdots,x_n,\xi_1,\cdots,\xi_n)\left|f(x_1\cdots x_n)-f(\xi_1\cdots\xi_n)\right|dx_1\cdots dx_n$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\iint\limits_{r\leqslant\delta_0}\cdots\int \Phi_t(x_1,\cdots x_n,\xi_1,\cdots\xi_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$+2M\iint\limits_{r>\delta_0}\cdots\int\frac{1}{a^n(\pi t)^{n/2}}\exp\left[-\frac{r^2}{a^2t}\right]dx_1\cdots dx_n$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\iint\limits_{R^n}\cdots\int \Phi_t(x_1,\cdots,x_n,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$+\frac{2M}{\pi^{n/2}}\iint\limits_{(u_1^2+\cdots+u_n^2)^{1/2}>\frac{\delta_0}{at^{1/2}}}\cdots\int e^{-(u_1^2+\cdots+u_n^2)}du_1\cdots du_n$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\pi^{n/2}}\iint\limits_{(u_1^2+\cdots+u_n^2)^{1/2}>\frac{\delta_0}{at^{1/2}}}\cdots\int e^{-(u_1^2+\cdots+u_n^2)}du_1\cdots du_n \qquad (1\text{-}56)$$

其中 $r=(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\cdots+(x_n-\xi_n)^2]^{1/2}$ 再由(1-53)式可见

$$\lim_{t\to 0^+}\iint\limits_{(u_1^2+\cdots+u_n^2)^{1/2}>\frac{\delta_0}{at^{1/2}}}\cdots\int e^{-(u_1^2+\cdots+u_n^2)}du_1\cdots du_n=0$$

于是，存在 $\delta>0$，使得当 $0<t<\delta$ 时，

$$\iint\limits_{(u_1^2+\cdots+u_n^2)^{1/2}>\frac{\delta_0}{a t^{1/2}}}\cdots\int e^{-(u_1^2+\cdots+u_n^2)}du_1\cdots du_n<\frac{\varepsilon\pi^{\frac{n}{2}}}{4M} \qquad (1\text{-}57)$$

将(1-57)式代入(1-56)式便知，当 $0<t<\delta$ 时，

$$\left|\iint\limits_{R^n}\cdots\int \Phi_t(x_1,\cdots,x_n,\xi_1,\cdots,\xi_n)[f(x_1,\cdots,x_n)-f(\xi_1,\cdots,\xi_n)]dx_1\cdots dx_n\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

这就证明了(1-54)式，从而本例的结论得证.

二、高维 δ-函数的性质

为了讨论高维 δ-函数的性质，这里还需要简单介绍两个多元函数弱相等的概念.

定义 1.13 设 G 为 R^n 内某区域(或闭区域). 若对任一于 G 内连续的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，恒有

$$\iint\limits_{G}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\iint\limits_{G}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

则称在弱意义下，于 G 内

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

或者称为于 G 内 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 是弱相等的.

需要指出的是：

(1)若此定义中的 G 就是 R^n，则往往除了要求 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 于 R^n 上连续外，还依问题的要求，对 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 附加其它的限制条件.

(2)正象一元函数的情形一样，多元函数弱相等的概念，也是两个普通多元函数相等概念的推广. 事实上，仿一元函数中相类似结论的推导不难证明，若 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 都在域 G 内连续，则这两个函数在 G 内弱相等必可推得它们在通常意义下于 G 内相等.

虽然高维 δ-函数的性质大多是一维 δ-函数相应性质的推广，但考虑到读者对这方面可能比较生疏，因此还是对它们给予扼要证明(因为这里只是采取古典分析的方法来论证，所以也只能算是形式上

的说明而已).

此外,下面所叙述的有关在 R^n 中的区域 G 内成立的高维 δ-函数的性质及推论,当 G 为闭区域时,也显然成立.

性质 1.11　设 G 为 R^n 中任一区域,则

$$\iint\limits_G\cdots\int \delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)dx_1,\cdots,dx_n=\begin{cases}1 & \text{当}(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in G\text{时}\\ 0 & \text{当}(\xi_1,\cdots,\xi_n)\overline{\in} G\text{时}\end{cases}$$

若将定义 1.8 至定义 1.10 这三个等价的定义之一作为 n 维 δ-函数的定义,而将另一个与其等价的定义 1.11 视为运算性质,则有

性质 1.12(运算性质)　设 $f(x_1,\cdots,x_n)$于 R^n 上连续,则

$$\iint\limits_{R^n}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)dx_1\cdots dx_n=f(\xi_1,\cdots,\xi_n)$$

证明　根据定义 1.9 与积分中值定理可知,对任意 $\varepsilon>0$,

$$\iint\limits_{R^n}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$=\iint\limits_{[(x_1-\xi_1)^2+\cdots+(x_n-\xi_n)^2]^{1/2}\leqslant\varepsilon}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$=f(\eta_1,\cdots,\eta_n)\iint\limits_{[(x_1-\xi_1)^2+\cdots+(x_n-\xi_n)^2]^{1/2}\leqslant\varepsilon}\cdots\int \delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$=f(\eta_1,\cdots,\eta_n)$$

其中 $\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2+\cdots+(\eta_n-\xi_n)^2}\leqslant\varepsilon$. 注意到 $f(x_1,\cdots,x_n)$于 R^n 上的连续性及 $\varepsilon>0$ 的任意性,立即可得

$$\iint\limits_{R^n}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}f(\eta_1,\cdots,\eta_n)=f(\xi_1,\cdots,\xi_n)$$

推论 1.11　设 $f(x_1,\cdots,x_n)$于 R^n 中某域 G 内连续,则当$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in G$ 时,

$$\iint\limits_G\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)dx_1\cdots dx_n=f(\xi_1,\cdots,\xi_n)$$

性质 1.12 和推论 1.11 所表述的高维 δ-函数的重要运算性质,为高维 δ-函数的广泛应用奠定了基础.

性质 1.13 对任何自然数 n，当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$ 时，恒有

$$\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)=\delta(x_1-\xi_1)\delta(x_2-\xi_2)\cdots\delta(x_n-\xi_n)$$

证明 对任一于 R^n 内连续的函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$，反复利用一维 δ-函数的性质 1.2，并根据上述的性质 1.12 便得

$$\iint_{R^n}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1)\cdots\delta(x_n-\xi_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$=\iint_{R^{n-1}}\cdots\int\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1)dx_1\Big]\delta(x_2-\xi_2)\cdots\delta(x_n-\xi_n)dx_2\cdots dx_n$$

$$=\iint_{R^{n-1}}\cdots\int[f(\xi_1,x_2,\cdots,x_n)\delta(x_2-\xi_2)\cdots\delta(x_n-\xi_n)dx_2\cdots dx_n$$

$$=\iint_{R^{n-2}}\cdots\int\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi_1,x_2,\cdots,x_n)\delta(x_2-\xi_2)dx_2\Big]\delta(x_3-\xi_3)\cdots\delta(x_n-\xi_n)dx_3\cdots dx_n$$

$$=\iint_{R^{n-2}}\cdots\int f(\xi_1,\xi_2,x_3,\cdots,x_n)\delta(x_3-\xi_3)\cdots\delta(x_n-\xi_n)dx_3\cdots dx_n=\cdots$$

$$=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\iint_{R^n}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1)\cdots\delta(x_n-\xi_n)dx_1\cdots dx_n$$

于是，由定义 1.13 便知(在弱意义下)

$$\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)=\delta(x_1-\xi_1)\cdots\delta(x_n-\xi_n)$$

$$(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$$

推论 1.12 设 G 为 R^n 内任一区域，则当 $(x_1,\cdots,x_n)\in G$ 时，

$$\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)=\delta(x_1-\xi_1)\cdots\delta(x_n-\xi_n)$$

性质 1.13 及推论 1.12 是高维 δ-函数的非常重要的性质，它们表明高维 δ-函数(在弱意义下)能够分解为一维 δ-函数的乘积.

性质 1.14 设 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 于 R^n 上连续，则当 $(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$ 时，

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)$$
$$=\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)$$

证明 对任一于 R^n 上连续的函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$，按性质 1.12 显然有

$$\iint_{R^n}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)[\varphi(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)]dx_1\cdots dx_n$$

$$=f(\xi_1,\cdots,\xi_n)\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)$$

$$\cdot\iint_{R^n}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$=\iint_{R^n}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)[\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)]dx_1\cdots dx_n$$

于是，根据定义 1.13 便立得所证.

推论 1.13 当$(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$时，有

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+\xi_k)(x_k-\xi_k)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)=0$$

证明 在性质 1.14 中，取 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}x_k^2$便得所证.

推论 1.14 当$(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$时，有

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2\delta(x_1,\cdots,x_n)=0$$

证明 只须在推论 1.13 中，取 $\xi_k=0(k=1,2,\cdots,n)$即可得证.

推论 1.15 设 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$与 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$都在 R^n 上连续. 若 $\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\psi(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，则当$(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$时，

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)$$
$$=\psi(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)$$

证明 由性质 1.14 可知，当$(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$时，

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)$$
$$=\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)$$
$$=\psi(\xi_1,\cdots,\xi_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)$$
$$=\psi(x_1,\cdots,x_n)\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)$$

性质 1.15 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$于 R^n 上 m 次连续可微，则

$$\iint_{R^n}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial^m\delta(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\cdots,x_n-\xi_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=(-1)^m\frac{\partial^m\delta(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}}$$

其中 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_s\leqslant n,s\leqslant n,m_j(j=1,2\cdots s)$ 为非负整数，且 $\sum_{j=1}^{s}m_j=m.$

证明 由性质 1.12、1.13 和 §1.5 中的性质 1.3，有

$$\iint_{R^n}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial^m\delta(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\cdots,x_n-\xi_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\iint_{R^n}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)Mdx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\iint_{R^{n-s}}\cdots\int\Big[\iint_{R^s}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)Mdx_{k_1}\cdots dx_{k_s}\Big]dx_1\cdots dx_{k_1-1}dx_{k_1+1}\cdots dx_{k_s-1}dx_{k_s+1}\cdots dx_n$$

$$=\iint_{R^{n-s}}\cdots\int\Big[\iint_{R^{s-1}}\cdots\int\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\cdots,x_n)Mdx_{k_1}\Big)dx_{k_2}\cdots dx_{k_s}\Big]dx_1\cdots dx_{k_1-1}dx_{k_1+1}\cdots dx_{k_s-1}dx_{k_s+1}\cdots dx_n$$

$$=\iint_{R^{n-s}}\cdots\int\Big[\iint_{R^{s-1}}\cdots\int(-1)^{m_1}Ndx_{k_2}\cdots dx_{k_s}\Big]dx_1\cdots dx_{k_1-1}dx_{k_1+1}\cdots dx_{k_s-1}dx_{k_s+1}\cdots dx_n$$

$$=\iint_{R^{n-s}}\cdots\int\Big[\iint_{R^{s-2}}\cdots\int(-1)^{m_1}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}Ndx_{k_2}\Big)dx_{k_3}\cdots dx_{k_s}\Big]dx_1\cdots dx_{k_1-1}dx_{k_1+1}\cdots dx_{k_s-1}dx_{k_s+1}\cdots dx_n$$

$$=\iint_{R^{n-s}}\cdots\int\Big[\iint_{R^{s-2}}\cdots\int(-1)^{m_1}(-1)^{m_2}Hdx_{k_3}\cdots dx_{k_s}\Big]dx_1\cdots dx_{k_1-1}dx_{k_1+1}\cdots dx_{k_s-1}dx_{k_s+1}\cdots dx_n$$

$$=\cdots=\iint_{R^{n-s}}\cdots\int(-1)^mPdx_1\cdots dx_{k_1-1}dx_{k_1+1}\cdots dx_{k_s-1}dx_{k_s+1}\cdots dx_n$$

$$=(-1)^m\frac{\partial^m f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}},$$

其中

$$M=\frac{d^{m_1}\delta(x_{k_1}-\xi_{k_1})}{dx_{k_1}^{m_1}}\cdots\frac{d^{m_s}\delta(x_{k_s}-\xi_{k_s})}{dx_{k_s}^{m_s}}\delta(x_1-\xi_1,\cdots,$$

$$x_{k_1-1}-\xi_{k_1-1},x_{k_1+1}-\xi_{k_1+1},\cdots,x_{k_s-1}-\xi_{k_s-1},x_{k_s+1}-\xi_{k_s+1},\cdots,x_n-\xi_n)$$

$$N=\frac{\partial^{m_1}f(x_1,\cdots,x_{k_1-1},\xi_{k_1},x_{k_1+1},\cdots,x_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}}\cdot\frac{d^{m_2}\delta(x_{k_2}-\xi_{k_2})}{dx_{k_2}^{m_2}}\cdots\frac{d^{m_s}\delta(x_{k_s}-\xi_{k_s})}{dx_{k_s}^{m_s}}$$

$$\cdot\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_{k_1-1}-\xi_{k_1-1},x_{k_1+1}-\xi_{k_1+1},\cdots,x_{k_s-1}-\xi_{k_s-1},$$

$$x_{k_s+1}-\xi_{k_s+1},\cdots,x_n-\xi_n)$$

$$H=\frac{\partial^{m_1+m_2}f(x_1,\cdots,x_{k_1-1},\xi_{k_1},x_{k_1+1},\cdots,x_{k_2-1},\xi_{k_2},x_{k_2+1},\cdots,x_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}}$$

$$\cdot\frac{d^{m_3}\delta(x_{k_3}-\xi_{k_3})}{dx_{k_3}^{m_3}}\cdots\frac{d^{m_s}\delta(x_{k_s}-\xi_{k_s})}{dx_{k_s}^{m_s}}\cdot\delta(x_1-\xi_1,\cdots,$$

$$x_{k_1-1}-\xi_{k_1-1},x_{k_1+1}-\xi_{k_1+1}\cdots x_{k_s-1}-\xi_{k_s-1},x_{k_s+1}-\xi_{k_s+1},\cdots,x_n-\xi_n)$$

$$P=\frac{\partial^m f(x_1,\cdots,x_{k_1-1}\xi_{k_1},x_{k_1+1},\cdots,x_{k_2-1},\xi_{k_2},x_{k_2+1},\cdots,x_{k_s-1},\xi_{k_s},x_{k_s+1},\cdots,x_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}}$$

$$\cdot\delta(x_1-\xi_1,\cdots,x_{k_1-1}-\xi_{k_1-1},x_{k_1+1}-\xi_{k_1+1},\cdots,$$

$$x_{k_s-1}-\xi_{k_s-1},x_{k_s+1}-\xi_{k_s+1},\cdots,x_n-\xi_n)$$

推论 1.16 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 于 R^n 中某区域 G 内 m 次连续可微，则当 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in G$ 时，

$$\iint_G\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial^m\delta(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\cdots,x_n-\xi_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=(-1)^m\frac{\partial^m f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}}$$

其中 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_s\leqslant n,s\leqslant n,m_j(j=1,2,\cdots s)$ 为非负整数，且 $\sum_{j=1}^{s}m_j=m$.

推论 1.17

$$\iint_{R^n}\cdots\int\frac{\partial^m\delta(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\cdots,x_n-\xi_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}}dx_1dx_2\cdots dx_n=0$$

并且对 R^n 中的任一区域 G，恒有

$$\iint_G\cdots\int\frac{\partial^m\delta(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\cdots,x_n-\xi_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}}dx_1dx_2\cdots dx_n=0$$

其中 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_s\leqslant n,s\leqslant n,m_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为非负整数，且 $\sum_{j=1}^{s}m_j=m\geqslant1$.

证明 在性质 1.15 和推论 1.16 中，取 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv1$，并注意到 $m\geqslant1$ 便可得证.

性质 1.16 当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$ 时，

$$\frac{\partial^m \delta(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, \cdots, x_n-\xi_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1} \partial x_{k_2}^{m_2} \cdots \partial x_{k_s}^{m_s}}$$

$$=\frac{\partial^m \delta(\xi_1-x_1, \xi_2-x_2, \cdots, \xi_n-x_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1} \partial x_{k_2}^{m_2} \cdots \partial x_{k_s}^{m_s}}$$

其中 $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_s \leqslant n, s \leqslant n, m_j (j=1,2,\cdots,s)$ 为非负整数，且 $\sum_{j=1}^{s} m_j = m$.

证明 由性质 1.13 及 § 1.5 中的推论 1.4 可知，当 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$ 时，

$$\frac{\partial^m \delta(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, \cdots, x_n-\xi_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1} \partial x_{k_2}^{m_2} \cdots \partial x_{k_s}^{m_s}}$$

$$=\delta(x_1-\xi_1)\cdots\delta(x_{k_1-1}-\xi_{k_1-1})\delta(x_{k_1+1}-\xi_{k_1+1})\cdots$$

$$\cdot\delta(x_{k_s-1}-\xi_{k_s-1})\delta(x_{k_s+1}-\xi_{k_s+1})\cdots\delta(x_n-\xi_n)$$

$$\cdot\frac{d^{m_1}\delta(x_{k_1}-\xi_{k_1})}{dx_{k_1}^{m_1}}\frac{d^{m_2}\delta(x_{k_2}-\xi_{k_2})}{dx_{k_2}^{m_2}}\cdots\frac{d^{m_s}\delta(x_{k_s}-\xi_{k_s})}{dx_{k_s}^{m_s}}$$

$$=\delta(\xi_1-x_1)\cdots\delta(\xi_{k_1-1}-x_{k_1-1})\delta(\xi_{k_1+1}-x_{k_1+1})\cdots$$

$$\cdot\delta(\xi_{k_s-1}-x_{k_s-1})\delta(\xi_{k_s+1}-x_{k_s+1})\cdots\delta(\xi_n-x_n)(-1)^{m_1}$$

$$\cdot\frac{d^{m_1}\delta(\xi_{k_1}-x_{k_1})}{d(\xi_{k_1}-x_{k_1})^{m_1}}(-1)^{m_2}\frac{d^{m_2}\delta(\xi_{k_2}-x_{k_2})}{d(\xi_{k_2}-x_{k_2})^{m_2}}\cdots(-1)^{m_s}\frac{d^{m_s}\delta(\xi_{k_s}-x_{k_s})}{d(\xi_{k_s}-x_{k_s})^{m_s}}$$

$$=\delta(\xi_1-x_1,\cdots,\xi_{k_1-1}-x_{k_1-1},\xi_{k_1+1}-x_{k_1+1},$$

$$\cdots\xi_{k_s-1}-x_{k_s-1},\xi_{k_s+1}-x_{k_s+1},\cdots,\xi_n-x_n)$$

$$\cdot\frac{d^{m_1}\delta(\xi_{k_1}-x_{k_1})}{dx_{k_1}^{m_1}}\cdot\frac{d^{m_2}\delta(\xi_{k_2}-x_{k_2})}{dx_{k_2}^{m_2}}\cdots\frac{d^{m_s}\delta(\xi_{k_s}-x_{k_s})}{dx_{k_s}^{m_s}}$$

$$=\delta(\xi_1-x_1,\cdots,\xi_{k_1-1}-x_{k_1-1},\xi_{k_1+1}-x_{k_1+1},\cdots,$$

$$\xi_{k_s-1}-x_{k_s-1},\xi_{k_s+1}-x_{k_s+1},\cdots,\xi_n-x_n)$$

$$\cdot\frac{\partial^m\delta(\xi_{k_1}-x_{k_1},\xi_{k_2}-x_{k_2},\cdots,\xi_{k_s}-x_{k_s})}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}}$$

$$=\frac{\partial^m \delta(\xi_1-x_1, \xi_2-x_2, \cdots, \xi_n-x_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1} \partial x_{k_2}^{m_2} \cdots \partial x_{k_s}^{m_s}}$$

推论 1.18 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 于 R^n 上 m 次连续可微,则

$$\iint\limits_{R^n}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial^m\delta(\xi_1-x_1,\xi_2-x_2,\cdots,\xi_n-x_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=(-1)^m\frac{\partial^m f(\xi_1,\cdots,\xi_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}}$$

若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 于 R^n 中某区域 G 内 m 次连续可微,则当 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in G$ 时,

$$\iint\limits_{G}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial^m\delta(\xi_1-x_1,\cdots,\xi_n-x_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=(-1)^m\frac{\partial^m f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}{\partial x_{k_1}^{m_1}\partial x_{k_2}^{m_2}\cdots\partial x_{k_s}^{m_s}}$$

其中 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_s\leqslant n,s\leqslant n,m_j(j=1,2,\cdots,s)$ 为非负整数,且 $\sum\limits_{j=1}^{s}m_j=m$.

证明 由性质 1.15、推论 1.16 和性质 1.16 立即可见本推论是正确的.

1.6.3 高维 δ-函数的几何意义与物理意义

仿照 § 1.3 对一维 δ-函数意义的陈述,下面分别就定义 1.8 至定义 1.10 及定义 1.11 扼要地从两个不同的侧面来说明高维 δ-函数的几何意义和物理意义. 此外,为了更加直观、形象地说明 n 维 δ-函数的几何意义与物理意义,我们仅就 $n=2$ 或 $n=3$ 的情形来加以阐述.

一、几何意义

(1) 以二维 δ-函数为例. 由定义 1.8 至定义 1.10,以及根据本节例 1.21 至例 1.23 所指出的把二维 δ-函数视为普通二元函数的弱极限的观点,可以把 $z=\delta(x-\xi,y-\eta)$ 看作是定义于整个 oxy 平面上,展布于 $oxyz$ 空间中的示意性的曲面 S(如图 1-5 所示). 它具有如下几何性质:

1° 在 oxy 平面上的点 (ξ,η) 处之直径为无限小的圆域 σ_ε 之外,该曲面 S 与 oxy 平面重合;

2° 在圆域 σ_ε 上，曲面 S 突起了一个无限高的"峰"；

3° 此曲面 S 下的体积值为 1.

这种几何解释虽然粗糙，但是却为这种非古典意义下的看来很"怪"的高维 δ-函数，提供了一个形象、直观的几何背景.

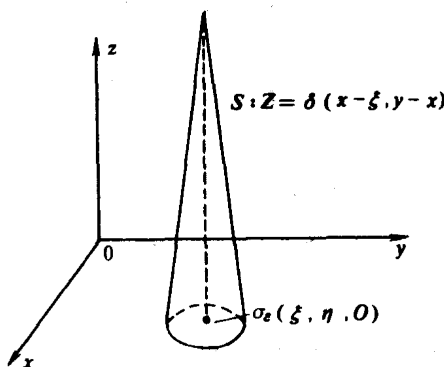


图 1-5

(2) 表征高维 δ-函数运算性质的定义 1.11 几何意义也同样是明显的. 它表明当点 (ξ,η) 遍经 oxy 平面时，空间 $oxyz$ 上的点 $(\xi,\eta,\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi,y-\eta)f(x,y)dxdy)$ 的轨迹正是函数 $z=f(x,y)(x,y)\in R^2$ 的几何图形.

二、物理意义

(1)以例 1.19、例 1.20 为物理背景所引进的高维 δ-函数的定义 1.8 至定义 1.10，反映了集中分布的物理量的物理特性——该物理量的密度分布函数的特性；也表明高维 δ-函数是此密度函数的局部分布与总体效应相结合的产物. 例如就定义 1.8 中 $n=3$ 的情形而言，

$$\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)=\begin{cases}0 & \text{当}(x,y,z)\neq(\xi,\eta,\zeta)\text{时}\\ \infty & \text{当}(x,y,z)=(\xi,\eta,\zeta)\text{时}\end{cases}$$

代表集中分布的物理量的密度的局部分布状态；而

$$\iiint_{R^3}\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)dxdydz=1$$

则代表该密度分布的总体效应.它表明若集中分布的物理量是电荷,则其电荷分布密度的总体效应与单位电荷等效;若集中分布的物理量是某种物质质量,则该物质分布密度的总体效应与单位质量等效.

也象一维 δ-函数一样,高维 δ-函数自然也不仅仅是象其定义的物理背景那样,只能描述集中分布于一点的物理量的物理特性.而是可以更广泛的表达一般离散(集中)分布的物理量的物理特性.不仅如此,借助于高维 δ-函数,还可以对连续分布与离散(集中)分布的物理量的物理特性,施以统一的数学表达.

例 1.24 设于 $oxyz$ 空间中,在(0,0,0)处置有电量为 6 单位的点电荷,在(0,1,1)处置有电量为 5 单位的点电荷,在(−1,2,−3)处置有电量为 4 单位的点电荷,而在其余各处没有电荷分布.则按三维 δ-函数的定义及其物理意义可知,$oxyz$ 空间中各点(x,y,z)的电荷分布密度为

$$\begin{aligned}\rho(x,y,z)=&6\delta(x,y,z)+5\delta(x,y-1,z-1)\\&+4\delta(x+1,y-2,z+3)\end{aligned}$$

并且,此电荷分布密度的总体效应——在 $oxyz$ 空间中分布的电荷总量显然是

$$\begin{aligned}\iiint_{R^3}\rho(x,y,z)dxdydz=&6\iiint_{R^3}\delta(x,y,z)dxdydz+5\iiint_{R^3}\delta(x,y-1,z-1)dxdydz\\&+4\iiint_{R^3}\delta(x+1,y-2,z+3)dxdydz=15(\text{单位})\end{aligned}$$

例 1.25 设于 $oxyz$ 空间中连续地分布某种物质,分布密度为 $r(x,y,z)$.假定于点(x_k,y_k,z_k)处又置有质量为 $m_k(k=1,2,\cdots,n)$的重物.试求 $oxyz$ 空间中各点(x,y,z)的物质分布密度函数 $\rho(x,y,z)$、$oxyz$ 空间上分布的物质的全部质量及其重心的位置.

解 按三维 δ-函数的定义及其物理意义可知

$$\rho(x,y,z)=r(x,y,z)+\sum_{k=1}^{n}m_k\delta(x-x_k,y-y_k,z-z_k)$$

于是，$oxyz$ 空间中分布的物质的总质量为

$$M = \iiint\limits_{R^3} \rho(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{R^3} r(x,y,z)dxdydz$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} m_k \iiint\limits_{R^3} \delta(x - x_k, y - y_k, z - z_k)dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{R^3} r(x,y,z)dxdydz + \sum_{k=1}^{n} m_k$$

从而所求重心的坐标(x_c, y_c, z_c)为

$$x_c = \frac{\iiint\limits_{R^3} x\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_{R^3} \rho(x,y,z)dxdydz} = \frac{\iiint\limits_{R^3} x\rho(x,y,z)dxdydz}{M} \tag{1-58}$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_{R^3} y\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_{R^3} \rho(x,y,z)dxdydz} = \frac{\iiint\limits_{R^3} y\rho(x,y,z)dxdydz}{M} \tag{1-59}$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_{R^3} z\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_{R^3} \rho(x,y,z)dxdydz} = \frac{\iiint\limits_{R^3} z\rho(x,y,z)dxdydz}{M} \tag{1-60}$$

原来仅对连续分布的情形才成立的(1-58)、(1-59)、(1-60)诸式，现在则对离散(集中)分布的情形也成立. 这就是说，不论物质是连续分布，还是离散(集中)分布的情形，其重心坐标都可以用统一的公式(1-58)、定义(1. 59)、(1-60)求得；只不过在离散分布的情形下，$\rho(x,y,z)$的表达式中出现三维 δ-函数，而对连续分布的情形，则不出现这种奇异函数而已. 不言而喻，能够把这种对立的物理对象，进行统一的数学处理的关键，就在于引进了能够恰当地反映集中分布这一物理特性的奇异函数——高维 δ-函数.

(2)具有重要运算意义的定义 1.10,则更深刻地体现了借助于 δ-函数所反映出的集中分布与连续分布的物理量的内在联系.

比如考察连续分布于平面薄片 S 上的作用力 $F(x,y)$. 仍记 S 为该薄片于 oxy 平面上所占有的区域. 若视 dx,dy 为无穷小,则于点 $(x,y)=(\xi,\eta)\in S$,可以认为

$$\delta(x-\xi,y-\eta)dxdy=1$$

从而,$F(x,y)\delta(x-\xi,y-\eta)dxdy$ 便可看作是只于点 $(\xi,\eta)\in S$ 处起作用且取值为 $F(\xi,\eta)$,而于 S 的其余点处作用力为零的集中力. 记

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}F(\xi,\eta) & \text{当}(x,y)=(\xi,\eta)\text{时}\\ 0 & \text{当}(x,y)\in S,\text{且}(x,y)\neq(\xi,\eta)\text{时}\end{cases}$$

则当 $(x,y)\in S$ 时,

$$F(x,y)\delta(x-\xi,y-\eta)dxdy=F_{\xi,\eta}(x,y)$$

于是,等式

$$\iint_S F(x,y)\delta(x-\xi,y-\eta)dxdy=F(\xi,\eta)$$

表明只在点 $(\xi,\eta)\in S$ 处起作用,且取值为 $F(\xi,\eta)$ 的集中力 $F_{\xi,\eta}(x,y)$ 在 S 上的总体效应,与作用于 S 上的连续力 $F(x,y)$,在点 (ξ,η) 处的局部效应等效. 既然作用于 S 上的连续力 $F(x,y)$ 可以视为当点 (x,y) 遍经 S 时诸 $F(x,y)$ 迭加而成,于是它自然也可以视为只在点 $(\xi,\eta)\in S$ 处起作用的集中力 $F_{\xi,\eta}(x,y)$,当 (ξ,η) 遍经 S 时迭加的结果. 这个结论既揭示了连续分布与集中分布的物理量之间的内在联系,又表明为了考察连续分布的物理量的物理特性,可以先考察集中分布的情形,而后再利用迭加原理,便可达到预期的目的.

1.6.4 n 维磨光算子

n 维磨光算子,在理论上和实际中都是有用的数学工具. 因此,我们在这里也简要地加以介绍.

所谓 n 维磨光算子,是将例 1.22 中所列举的函数略加变通后作为核函数的积分算子. 由此,可以看出 n 维磨光算子与 n 维 δ-函数的

内在联系.

定义 1.14 设

$$J(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases} r^{-1}\exp\left[-\dfrac{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}{1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\right] \\ \qquad\qquad\qquad \text{当}\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}<1\text{时} \\ 0 \qquad\qquad \text{当}\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\geqslant 1\text{时} \end{cases}$$

其中

$$r=\iint\cdots\int_{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}<1}\exp\left[-\frac{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}{1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\right]dx_1dx_2\cdots dx_n$$

则以

$$\begin{aligned}&J_\varepsilon(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n)\\&=\frac{1}{\varepsilon^n}J\left(\frac{x_1-y_1}{\varepsilon},\frac{x_2-y_2}{\varepsilon},\cdots,\frac{x_n-y_n}{\varepsilon}\right)\qquad(\varepsilon>0)\end{aligned}$$

为核的积分算子

$$\begin{aligned}J_\varepsilon\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\iint_G\cdots\int &J_\varepsilon(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n)\\&\cdot\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)dy_1dy_2\cdots dy_n\end{aligned}$$

称为 n 维磨光算子,其中 G 为 R^n 中某区域,$\varphi(x_1,x_2,\cdots x_n)$于 G 上可积.

n 维磨光算子的理论意义及其应用,主要基于下述定理:

定理 1.3 设 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$于 R^n 中某有界闭区域 G 上连续,则 $J_\varepsilon\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$于 G 上任意次连续可微,且极限式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}J_\varepsilon\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

于 G 上一致地成立.

证明 结论的前一部分,由含参变量的 n 重积分在积分号下的微商定理即可得证. 为了证明结论的后一部分,首先将函数 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$连续有界地延拓到 R^n 上,使之成为在 R^n 上连续有界的函数,

记之为 $\bar{\varphi}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$*. 由于 $\bar{\varphi}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在 R^n 内任一有界闭区域上一致连续,再根据 $J_\varepsilon(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$的定义便知,当$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in G$ 时,一致地有

$$
\begin{aligned}
&|J_\varepsilon\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\\
=&\left|\iint_{r^n}\cdots\int J_\varepsilon(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)\bar{\varphi}(y_1,\cdots,y_n)dy_1\cdots dy_n\right.\\
&\left.-\varphi(x_1,\cdots,x_n)\iint_{r_n\leqslant\varepsilon}\cdots\int J_\varepsilon(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)dy_1\cdots dy_n\right|\\
\leqslant&\iint_{r_n\leqslant\varepsilon}\cdots\int|\bar{\varphi}(y_1,\cdots,y_n)-\bar{\varphi}(x_1,\cdots,x_n)|J_\varepsilon(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)dy_1\cdots dy_n\\
\leqslant&\max_{r_n\leqslant\varepsilon}|\bar{\varphi}(y_1,\cdots,y_n)-\bar{\varphi}(x_1,\cdots,x_n)|\iint_{r_n\leqslant\varepsilon}\cdots\int J_\varepsilon(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)dy_1\cdots dy_n\\
=&\max_{\substack{r_n\leqslant\varepsilon\\ P\in G}}|\varphi(y_1,\cdots,y_n)-\varphi(x_1,\cdots,x_n)|\to 0(\varepsilon\to 0)
\end{aligned}
$$

其中 $r_n=[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{1/2}$,$P$ 为点$(x_1,\cdots,x_n)$.

稍加比较便不难看出,n 维磨光算子和定理 1.3 分别与一维磨光算子和定理 1.1 类似. 此外,n 维磨光算子的作用,也与一维的情形相类似. 因此这方面的例子不再赘述.

§1.7 δ-函数的数学理论简介

前面曾不止一次地指出,借助于物理直观所定义的 δ-函数是不能按古典意义下的普通函数来理解的. 为了能够确切理解和运用 δ-函数,就必须推广普通函数的定义,使得新的函数概念能够容纳 δ-函数. 于是,我们面临的问题是,应当遵循何种途径来推广函数的定

---

* 比如,设

$$
\bar{\varphi}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n) & \text{当}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in G\text{时}\\ \max\limits_{(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in G}\left[\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)\dfrac{\rho(x_1,x_2,\cdots,x_n;G)}{\rho(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n)}\right] & \text{当}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\overline{\in}G\text{时}\end{cases}
$$

其中 $\rho(x_1,\cdots,x_n;G)$及 $\rho(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)$分别代表点$(x_1,\cdots,x_n)$与域 G 的距离及点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$(y_1,y_2,\cdots y_3)$的距离.

义，才能达到预期的目的？这正是本节要向读者简单介绍的 δ-函数的数学理论. 鉴于这部分理论全面深入的论述必将涉及到许多专门而又较深的数学知识，从而使得在理论和实际工作中经常使用 δ-函数这一数学工具，而又并非专门从事数学工作的人们感到困难；可又不能使读者在读完本书后，对 δ-函数还是觉得那么"离奇"和困惑不解，因此，我们既感到这些内容有必要加以介绍，又只能扼要地把论述铺陈到"解惑"的程度，以尽可能少涉及那些更高深的数学理论.

我们曾强调指出，δ-函数的运算性质，即对任一于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$ 恒有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \tag{1-61}$$

深刻地体现了 δ-函数的本质属性. 它不仅反映了现实的量的重要的物理特性——单位集中量的密度分布，揭示了集中分布与连续分布的物理量的内在联系，而且，还为 δ-函数提供了有效的运算手段. 于是，为了使得推广了的函数定义能够包括 δ-函数，我们将从(1-61)式入手，来引述新的函数概念. 为此，我们首先介绍一些有关泛函的基本概念，这对于理解后面将要讲到的广义函数的概念是必不可少的.

1.7.1 有关泛函的一些基本概念

定义 1.15 设 E 为某一集合*，σ 为全体实数或全体复数集合，若满足如下条件

1° 对于任意二元素 $x,y\in E$，恒存在唯一元素 $z\in E$ 与之对应，记为 $z=x+y$，并称为 x 与 y 的和，且此加法运算具有如下性质：

(1) 当 $x,y\in E$ 时，恒有 $x+y=y+x$；

(2) 当 $x,y,z\in E$ 时，恒有 $x+(y+z)=(x+y)+z$；

(3) 存在元素 $0\in E$，使得当 $x\in E$ 时，恒有 $x+0=x$；

(4) 对于任一元素 $x\in E$，恒存在元素 $-x$，使得 $x+(-x)=0$.

---

* 所谓集合，乃是一些东西的总体，这些东西叫做该集合的元素. 若 x 为集合 E 的元素，则记为 $x\in E$；若 x 不是 E 中的元素，则记为 $x\overline{\in} E$.

2° 对于任一数 $\alpha\in\sigma$ 及 $x\in E$,都恰有一个确定的元素 $w\in E$ 与之对应,记为 $w=\alpha x$,并称之为数 α 与元素 x 的乘积,且此乘法运算具有如下性质:

(1) 当 $\alpha,\beta\in\sigma,x\in E$ 时,恒有 $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

(2) 当 $x\in E$ 时,$1\cdot x=x$;

3° 加法运算与乘法运算之间有如下性质:

(1) 当 $\alpha,\beta\in\sigma,x\in E$ 时,$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

(2) 当 $\alpha\in\sigma,x,y\in E$ 时,$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

则称 E 为数域 σ 上的线性空间,或者简称 E 为线性空间;也称 E 为向量空间,E 中的元素为向量. 特别,若 σ 为全体实数集合,则称 E 为实线性空间;若 σ 为全体复数集合,则称 E 为复线性空间.

上述抽象的线性空间的定义,其实正是具有明显几何直观的三维向量空间所具有的本质特征的数学抽象.

在三维向量空间中,向量的模(长度)的概念,起着重要作用. 类似地,在抽象的线性空间中,也有所谓模(范数)的概念.

定义 1.16 设 E 为数域 σ 上的线性空间,若对于任一 $x\in E$,恒存在一个非负实数与之对应,记为 $\|x\|$,并且

(1) $\|x\|=0\Longleftrightarrow x=0$;

(2) 若 $x\in E,\alpha\in\sigma$,则 $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$;

(3) 若 $x,y\in E$,则 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

则称 E 为线性赋范空间,或简称为赋范空间,并称 $\|x\|$ 为 E 中的元素 x 的范数,也称 $\|x\|$ 为 E 中的元素 x 的模. 引进模的线性空间也称为线性有模空间.

例 1.26 设 R 为全体实数构成的集合,若对于任一 $x\in R$,定义其范数为其绝对值 $|x|$,则 R 就成为一个线性赋范空间.

例 1.27 所谓 n 维欧氏空间,乃是由任意 n 个有序实数所构成的一切数组 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为元素的空间 R^n. 显而易见,R^n 为实线性空间. 若对于任一 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$,规定

$$\|X\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

则 R^n 便是线性赋范空间.

例 1.28 记 $C_{[a,b]}$为定义于$[a,b]$上的全体连续函数集合，并且按通常意义来定义 $C_{[a,b]}$中元素的加法运算以及数与其元素的乘法运算. 若对任一 $f(x)\in C_{[a,b]}$，定义

$$\| f(x) \| = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$$

则 $C_{[a,b]}$即为线性赋范空间.

极限运算是分析学中最基本、最重要的运算，而极限运算则依赖于距离概念. 在线性空间中，也常常需要引进极限运算，因此也需要以某种方式引进距离概念. 其实，在线性空间中引进了模的概念，也就等价于引进了距离的概念. 为了能够了解距离概念的本质，我们先介绍一下以距离概念为基础的度量空间的概念.

定义 1.17 设 X 是由某些元素所构成的集合，若对于任何 $x,y\in X$，恰有一个非负实数与之对应，记之为 $\rho(x,y)$，并且它满足如下条件：

(1) $\rho(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

(3) $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geqslant\rho(x,z)$

则称 X 为度量空间或距离空间，称 X 中的元素为空间的点，称 $\rho(x,y)$为 x 与 y 两点之间的距离.

显然，任一赋范空间必为一度量空间. 事实上，对该赋范空间中任意二元素 x,y，若规定 $\rho(x,y)=\| x-y\|$，则易见此赋范空间为度量空间. 于是，对线性空间赋于范数的概念，就等价于给出了距离的定义. 从而对于线性赋范空间就可以引进极限运算.

定义 1.18 设$\{x_n\}$为线性赋范空间 E 中某点列，若存在 $a\in E$，使得

$$\rho(x_n,a) = \| x_n - a\| \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

则称点列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$时以点 a 为极限，也称$\{x_n\}$收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

例 1.29 按例 1.28 中于 $C_{[a,b]}$内的范数的定义易见，若设$f_n(x)$

$\in C_{[a,b]}(n=1,2,\cdots)$，$f(x)\in C_{[a,b]}$，则

$$\| f_n(x) - f(x) \| \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

的充要条件为 $f_n(x)$于$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$.

下面介绍泛函及其连续性和线性泛函的概念.

定义 1.19 设 E 为线性赋范空间，则称定义于 E 上的数值函数 $f(x)$为赋范空间 E 上的泛函，或简称为泛函.

定义 1.20 设 E 为数域 σ 上的线性赋范空间，$f(x)$为 E 上的泛函，若对于任意 $x,y\in E$，$\alpha,\beta\in\sigma$，恒有

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

则称 $f(x)$是 E 上的线性泛函.

定义 1.21 设 $f(x)$为线性赋范空间 E 上的泛函，若任给 $\varepsilon>0$，恒存在 $\delta>0$，使得当 $x_1,x_2\in E$ 时，只要 $\| x_1-x_2 \|<\delta$，便有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

则称泛函 $f(x)$于 E 上连续.

下面举两个有关连续线性泛函的具体例子.

例 1.30 设 $C_{[a,b]}$为例 1.28 中所述的线性赋范空间. 则对于任一 $x(t)\in C_{[a,b]}$，由于 $x(t)$在$[a,b]$上连续，所以积分$\int_a^b x(t)dt$存在. 从而，容易证明

$$F(x) = \int_a^b x(t)dt$$

是空间 $C_{[a,b]}$上的线性泛函，并且对于任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{b-a}$，当$x_1(t)$，$x_2(t)\in C_{[a,b]}$且 $\| x_1(t)-x_2(t) \|<\delta$ 时，

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_a^b [x_2(t) - x_1(t)]dt\right| \leqslant \int_a^b |x_2(t) - x_1(t)|dt$$

$$= \max_{t\in[a,b]} |x_2(t) - x_1(t)|(b-a) = \| x_2(t) - x_1(t) \| (b-a) < \varepsilon$$

于是，泛函 $F(x)$于 $C_{[a,b]}$上连续.

例 1.31 设 $x_0(t)$是$[a,b]$上某已知的连续函数，则对于任一$x(t)\in C_{[a,b]}$，

$$f(x) = \int_a^b x(t)x_0(t)dt$$

显然是空间 $C_{[a,b]}$ 上的线性泛函. 事实上，首先由 $f(x)$ 的定义及例 1.28 可知，$f(x)$ 是定义于 $C_{[a,b]}$ 上的泛函；其次，对任意 $x_1(t),x_2(t)\in C_{[a,b]}$，以及数域 σ 上的任意二数 α,β，恒有

$$\begin{aligned}f(\alpha x_1+\beta x_2)&=\int_a^b[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]x_0(t)dt\\&=\alpha\int_a^b x_1(t)x_0(t)dt+\beta\int_a^b x_2(t)x_0(t)dt\\&=\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)\end{aligned}$$

因此，泛函 $f(x)$ 是线性的. 此外，我们还可以证明泛函 $f(x)$ 是连续的. 事实上，若于 $[a,b]$ 上，$x_0(t)\equiv 0$，则结论显然成立；若于 $[a,b]$ 上，$x_0(t)\not\equiv 0$，则由 $x_0(t)$ 于 $[a,b]$ 上连续可知

$$r=\int_a^b|x_0(t)|dt\neq 0$$

于是对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{r}$，当 $x_1(t),x_2(t)\in C_{[a,b]}$ 且 $\|x_1(t)-x_2(t)\|<\delta$ 时，

$$\begin{aligned}|f(x_2)-f(x_1)|&=\left|\int_a^b[x_2(t)-x_1(t)]x_0(t)dt\right|\\&\leqslant\int_a^b|x_2(t)-x_1(t)||x_0(t)|dt\\&\leqslant\max_{t\in[a,b]}|x_2(t)-x_1(t)|\int_a^b|x_0(t)|dt\\&=\|x_2(t)-x_1(t)\|\int_a^b|x_0(t)|dt<\delta\cdot r=\varepsilon\end{aligned}$$

这表明泛函 $f(x)$ 于 $C_{[a,b]}$ 上连续.

1.7.2 δ-函数与广义函数的定义

有了上面所介绍的那些关于泛函的基本概念作为基础，就可以转入广义函数的讨论了. 所谓广义函数，简言之，就是定义于某一函数空间* Φ 上的连续线性泛函. 下面我们从例 1.31 出发，略作一些有益的引伸，以便于展开对所论问题的阐述.

---

* 这里所谓的函数空间，是某些函数的集合，并且此集合构成线性赋范空间.

例 1.31 表明，由定义于$[a,b]$上的连续函数 $x_0(t)$可以确定连续函数空间 $C_{[a,b]}$上的一个连续线性泛函：

$$f(x)=\int_a^b x(t)x_0(t)dt \tag{1-62}$$

而且，当 $x_0(t),x_1(t)\in C_{[a,b]}$，只要 $x_0(t)$异于 $x_1(t)$，则它们必不会确定同一个泛函. 亦即，若对任一 $x(t)\in C_{[a,b]}$，恒有

$$\int_a^b x(t)x_0(t)dt=\int_a^b x(t)x_1(t)dt$$

则当 $t\in[a,b]$时，$x_0(t)\equiv x_1(t)$. 事实上，假若不然，设 $t_0\in[a,b]$，使 $x_0(t_0)\neq x_1(t_0)$，则由 $x_0(t),x_1(t)$于$[a,b]$上连续，可知必存在含于$[a,b]$内的开区间 Λ，便得

$$x_0(t)\neq x_1(t) \qquad \text{当 } t\in\Lambda \text{ 时}$$

不妨设

$$x_0(t)-x_1(t)>0 \qquad \text{当 } t\in\Lambda \text{ 时}$$

今取 $\tilde{x}(t)\in C_{[a,b]}$，使得当 $t\in\Lambda$ 时，$\tilde{x}(t)>0$；当 $t\overline{\in}\Lambda$ 时，$x(t)=0$. 于是

$$\int_a^b \tilde{x}(t)[x_0(t)-x_1(t)]dt=\int_\Lambda \tilde{x}(t)[x_0(t)-x_1(t)]dt>0$$

从而引出矛盾. 这表明，定义于$[a,b]$上的连续函数 $x_0(t)$与由(1-62)式所确定的定义于 $C_{[a,b]}$ 上的连续线性泛函是一一对应的. 可是，一个定义于 $C_{[a,b]}$上的泛函，却未必能与一个定义于$[a,b]$上的连续函数相对应，也未必能与一个其它普通函数相对应. 比如，设 $t_0\in[a,b]$，并且对于 $C_{[a,b]}$ 中任一函数 $x(t)$，定义

$$f(x)=x(t_0)$$

在量子力学中常记之为

$$x(t_0)=\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)dt \tag{1-63}$$

其中 $\delta(t-t_0)$就不是普通函数. 为了弄清楚这一点，我们采用如下与之相类似的另一种提法*.

---

* 直接就(1-63)式也完全可以说明 $\delta(t-t_0)$是 δ-函数. 这里之所以通过(1-64)式来说明它，不过是顾及到 δ-函数原来的定义而已.

设由定义于$(-\infty,+\infty)$上的全体连续函数所构成的函数空间为F. 对任一$f(t)\in F$,定义F上的泛函为$\delta_0[f(t)]=f(0)$,记为

$$f(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)dt \tag{1-64}$$

则不难看出,这里的函数$\delta(t)$其实就是δ-函数. 事实上,按上述记法,如果取$f(t)\equiv 1$,则得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1 \tag{1-65}$$

此外,在§1.2中,我们已经严格地证明了(1-64)式中的$\delta(t)$可表示为某些含参数的普通函数族的弱极限,并且这些函数族都具有这样的性质——随着其参数沿着某种确定的趋势变化,依赖于该参数的函数,在别处恒为零,而包含$t=0$的使之不为零的区间的长度随之趋于零. 于是,在弱意义下

$$\delta(t)=0 \qquad 当\ t\neq 0\ 时 \tag{1-66}$$

由(1-65)和(1-66)式可见,此$\delta(t)$正是原来借助于物理直观引进的由定义1.3所定义的δ-函数.

如上所述,定义于$[a,b]$上的连续函数$x_0(t)$,与由它确定的定义于空间$C_{[a,b]}$上的连续线性泛函

$$f_{x_0}(x)=\int_a^b x_0(t)x(t)dt \qquad x(t)\in C_{[a,b]}$$

是一一对应的. 于是,我们就把意义本来不同的$x_0(t)$与$f_{x_0}(x)$视为代表同一对象的两个不同的符号. 不言而喻,对于一般的函数空间上的泛函,自然也可以持类似的看法. 前面已经说过,一般由普通函数所构成的函数空间Φ上的连续线性泛函,未必对应普通函数. 既然与普通函数对应的连续线性泛函,可以视为普通函数的"替身",那么这类函数空间Φ上的连续线性泛函(作为"替身")就既包括了构成普通函数空间的普通函数,又包括了非普通的"函数". 这正是下面我们把这类函数空间Φ上的连续线性泛函称为广义函数的缘由.

广义函数的定义,显然与函数空间Φ有关. 例如,若Φ是平方可积的函数的全体(即L^2空间),则此时Φ中的连续线性泛函与此函数空间Φ中的函数一一对应. 于是,Φ上的广义函数正是平方可积函数

的全体. 换句话说,此时所谓的广义函数其实并没有什么推广,还都是普通的函数. 若 Φ 是连续函数的全体,则此时 Φ 上的广义函数,确实是 Φ 中普通函数的推广. 事实上,这时 Φ 上的广义函数是与某司蒂阶(Stieltjes)积分一一对应. 不难证明,函数空间 Φ 越窄,定义于 Φ 上的连续线性泛函(即广义函数)也就越多.

为了使所得到的(包括 δ-函数在内的)广义函数,具有更好的运算性质,比如具有任意次可微性等,我们常常对函数空间 Φ 加上某些限制. 为此,我们取 Φ 为所有于$(-\infty,+\infty)$上任意次可微,还各自在某个有界区间*之外恒为零的函数所组成的空间,并且称之为基本空间 K. 基本空间 K 中的函数称为基本函数.

显而易见,基本空间 K 是一无穷集合. 例如,对于任意给定的正数 a,b,函数

$$\varphi(x,a,b)=\begin{cases}e^{-b^2/(x-a)^2} & \text{当 } |x|<a \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } |x|\geqslant a \text{ 时}\end{cases}$$

及其经过平移或有限次线性组合所得到的函数,都是空间 K 中的函数.

定义 1.22 设 $\varphi_n(x)\in K(n=1,2,\cdots)$,且所有 $\varphi_n(x)$都在同一有界闭区间 L 之外恒为零. 记 $\|\varphi_n^{(m)}(x)\|_L=\max\limits_{x\in L}|\varphi_n^{(m)}(x)|$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n^{(m)}(x)\|_L=0 \qquad (m=0,1,2,\cdots)$$

亦即对任一非负整数 m,函数序列$\{\varphi_n^{(m)}(x)\}$皆于 L 上一致收敛于零,则称 K 中的函数序列$\{\varphi_n(x)\}$收敛于零,记之为

$$\varphi_i(x)\to 0(K)$$

定义 1.23 基本空间 K 上的连续线性泛函称为 K 上的广义函数. 换言之,所谓 f 是空间 K 上的广义函数,即对任一 $\varphi\in K$,都恰有一个实数**与之对应,记之为

$$f(\varphi)=(f,\varphi)$$

---

* 本节仅就广义函数为一维 δ-函数的情形进行论述. 若涉及高维情形,显然应将此处的区间改为相应的高维区域.

** 此处若为复数,则后面的(1-67)式右端的 $f(x)$应改为其复共轭$\overline{f(x)}$.

且 $f(\varphi)$ 具有如下性质：

1° **线性性**：对任何 $\varphi,\psi\in K$ 以及任意二数 α,β*，恒有

$$f(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha f(\varphi)+\beta f(\psi)$$

2° **连续性**：当 $\varphi_\nu\to 0(K)$ 时，恒有 $f(\varphi_\nu)\to 0$.

需要指出的是，若 K 上的广义函数一一对应于在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且于任一闭区间上可积的函数，记之为 $f(x)$，即这里的广义函数就可以视为 $f(x)$，则记

$$(f,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx \tag{1-67}$$

我们常称基本空间 K 上的广义函数的全体所构成的集合为空间 K 的对偶空间，记为 K'.

从定义 1.23 及(1-67)式可知，在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且于任一闭区间上可积的函数 $f(x)\in K'$.

定义 1.24 若对任一 $\varphi\in K$，定义 K 上的泛函为

$$\delta(\varphi)=\varphi(0)$$

则 $\delta(\varphi)$ 显然为空间 K 上的广义函数. 我们称此广义函数为 δ-函数，并记之为

$$\delta(\varphi)=(\delta,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx^{**}$$

此广义函数 $\delta(\varphi)$ 通常就记为 $\delta(x)$. 仿(1-64)、(1-65)、(1-66)式所述可以证明，它正是前面所讨论过的 δ-函数.

1.7.3 广义函数的基本运算

设 f,g 为在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且于任一闭区间上可积的普通函数. 由(1-67)式可知，对任一 $\varphi\in K$，恒有

$$(f+g,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)+g(x)]\varphi(x)dx$$

---

* 设基本空间 K 是数域 σ 上的线性空间. 于是若 σ 为实数域，则 α,β 只取实数；若 σ 为复数域，则 α,β 可以为复数.

** 受(1-67)式的启示，为表达一致起见，才采用此记号.

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\varphi(x)dx$$
$$=(f,\varphi)+(g,\varphi)$$

将这种普通函数加法的运算加以推广，则有如下定义：

定义 1.25 设 $f,g\in K'$. 对任一 $\varphi\in K$，定义 $f+g$ 为

$$(f+g,\varphi)=(f,\varphi)+(g,\varphi)$$

并称之为 f 与 g 的和.

容易证明，若 $f,g\in K'$，则 $f+g\in K'$. 换言之，当 f 与 g 皆为 K 上的连续线性泛函时，$f+g$ 也为 K 上的连续线性泛函.

设 f 为在$(-\infty,+\infty)$上有定义，且于任一闭区间上可积的普通函数，a 为实数，由(1-67)式可知，对任一 $\varphi\in K$，恒有

$$(af,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}af(x)\varphi(x)dx=a\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx=a(f,\varphi)$$
$$=\int_{\infty}^{+\infty}f(x)[a\varphi(x)]dx=(f,a\varphi)$$

将这种数与普通函数的乘法运算加以推广，则有如下定义：

定义 1.26 设 a 为实数，$f\in K'$对任一 $\varphi\in K$，定义 af 为

$$(af,\varphi)=(f,a\varphi)^{*}=a(f,\varphi)$$

并称之为 a 与 f 的乘积.

容易证明，对任意实数 a，若 $f\in K'$，则 $af\in K'$.

设 f 为在$(-\infty,+\infty)$上有定义，且于任一闭区间上可积的普通函数，$h\in K$，则对任一 $\varphi\in K$，恒有

$$(hf,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)f(x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)[h(x)\varphi(x)]dx$$
$$=(f,h\varphi)$$

将这种普通函数与 K 中函数的乘积运算推广之，便得到如下定义：

定义 1.27 设 $h\in K$. 对任意 $\varphi\in K$，$f\in K'$，定义 hf 为

$$(hf,\varphi)=(f,h\varphi)^{**}$$

---

* 当 a 为复数时，此处应为$(f,\bar{a}\varphi)$.

** 当 $h(x)$为复值函数时，此处应是$(f,\bar{h}\varphi)$.

并称之为 h 与 f 的乘积.

容易证明，若 $h\in K$，$f\in K'$，则 $hf\in K'$. 事实上，hf 的线性性是显然的；至于连续性，则利用普通函数的高阶微商的莱布尼兹(Leibnitz)公式

$$\frac{d^k}{dx^k}[h(x)\varphi_n(x)] = \sum_{s=0}^{k} C_k^s \frac{d^{k-s}h(x)}{dx^{k-s}} \cdot \frac{d^s\varphi_n(x)}{dx^s}$$

便不难得到证明.

顺便指出，一般不宜给出 K' 上的两个广义函数的乘积定义.

下面我们引进广义函数的极限概念.

定义 1.28 设 $f_n\in K'(n=1,2,\cdots)$. 若对于任何 $\varphi\in K$，数列 $\{(f_n,\varphi)\}$ 恒收敛，记其极限为 $f(\varphi)$，即

$$\lim_{n\to\infty}(f_n,\varphi) = f(\varphi) = (f,\varphi) \qquad (\varphi\in K)$$

则称广义函数序列 $\{f_n\}$ 收敛于 f，或称广义函数序列 $\{f_n\}$ 的极限为 f，记为

$$f_n \to f \qquad (n\to\infty)$$

关于定义 1.28，我们作如下几点说明：

1° 这里所定义的广义函数序列的收敛性概念，正是泛函分析中所谓的"弱收敛"概念. 因此，我们也把广义函数序列 $\{f_n\}$ 收敛于 f 称为 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f，或称 $\{f_n\}$ 的弱极限为 f，并记之为

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{\text{弱}}{=} f$$

或者

$$f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{弱}}{\Rightarrow}} f$$

2° 若广义函数序列 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f，则不难证明 f 是 K 上的连续线性泛函. 换言之，K 上收敛的广义函数序列的极限仍是 K 上的广义函数.

3° 若 $\{f_\mu\}$ 为 K' 中依赖于参数 $\mu\in\Delta$ 的广义函数族，则根据在高等数学中所熟知的海涅(Heine)定理易见，当参数 μ 在 Δ 中按某种趋势变化比如 $\mu\to\mu_0$ 时，$\{f_\mu\}$ 的极限定义显然可以归结为定义 1.27. 从而可以这样定义其极限：设 $f_\mu\in K'(\mu\in\Delta)$. 若对任一 $\varphi\in K$，$\lim\limits_{\mu\to\mu_0}(f_\mu,$

φ)恒存在，记其极限为 $f(\varphi)$，即

$$\lim_{\mu\to\mu_0}(f_\mu,\varphi) = f(\varphi) = (f,\varphi) \qquad (\varphi \in K)$$

则称当 $\mu\to\mu_0$ 时 $\{f_\mu\}$ 弱收敛于 f 或称当 $\mu\to\mu_0$ 时 $\{f_\mu\}$ 的弱极限为 f，记为

$$\lim_{\mu\to\mu_0} f_\mu \overset{弱}{=} f$$

或者

$$f_\mu \underset{\mu\to\mu_0}{\overset{弱}{\Rightarrow}} f$$

概括地说，广义函数理论是在于推广古典的微积分运算.

若于 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义的函数 $f(x)$ 为普通的 k 次连续可微函数，则对于 $\varphi(x)\in K$，由分部积分公式，

$$(f'(x),\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty\,*} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$
$$= -(f(x),\varphi'(x))$$

依此类推，则得

$$(f^{(m)}(x),\varphi(x)) = (-1)^m(f(x),\varphi^{(m)}(x)) \qquad (m = 1,2,\cdots,k)$$

将上述结论推广到广义函数上，便得到关于广义函数的微商概念.

定义 1.29 设 $f(\varphi)$ 为基本空间 K 上的广义函数，即

$$f(\varphi) = (f,\varphi) \qquad (\varphi \in K)$$

定义 $f^{(m)}$ 为

$$(f^{(m)}(x),\varphi(x)) = (-1)^m(f(x),\varphi^{(m)}(x)) \qquad (m = 1,2,\cdots)$$

并称之为广义函数 f 的 m 次微商(或广义微商).

容易证明，K 上的广义函数的任意阶导数仍是 K 上的广义函

---

* 由基本空间 K 的定义可知，当 $\varphi(x)\in K'$ 时，

$$\varphi^{(n)}(\pm\infty) = 0 \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

数. 换言之，若 $f\in K'$，则 $f^{(m)}\in K'(m=1,2,\cdots)$.

例 1.32 设 $s_\varepsilon(x)$，$J_\varepsilon(x)$，$\Phi_t(x,\xi)$，$\varphi_\eta(x)$，$\varphi_N(x)$ 依次为 §1.2 的例 1.3 至例 1.7 所列举的函数. 则按照其各自所在例中已经严格证明了的结果，并根据定义 1.23 与定义 1.24，便知，当 $\varphi\in K$ 时，有

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}(s_\varepsilon(x),\varphi(x))=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}s_\varepsilon(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)=(\delta(x),\varphi(x))$$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}(J_\varepsilon(x),\varphi(x))=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}J_\varepsilon(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)=(\delta(x),\varphi(x))$$

$$\lim_{t\to0^+}(\Phi_t(x,\xi),\varphi(x))=\lim_{t\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_t(x,\xi)\varphi(x)dx=\varphi(\xi)$$
$$=(\delta(x-\xi),\varphi(x))$$

$$\lim_{\eta\to0^+}(\Phi_\eta(x),\varphi(x))=\lim_{\eta\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\eta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)=(\delta(x),\varphi(x))$$

$$\lim_{N\to+\infty}(\varphi_N(x),\varphi(x))=\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)=(\delta(x),\varphi(x))$$

上面所列出的各普通函数，显然可视为广义函数. 于是，由上述结论及广义函数弱收敛的定义，可知

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}S_\varepsilon(x)\overset{弱}{=}\delta(x)$$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}J_\varepsilon(x)\overset{弱}{=}\delta(x)$$

$$\lim_{t\to0^-}\varphi_t(x,\xi)\overset{弱}{=}\delta(x-\xi)$$

$$\lim_{\eta\to0^+}\varphi_\eta(x)\overset{弱}{=}\delta(x)$$

$$\lim_{N\to+\infty}\varphi_N(x)\overset{弱}{=}\delta(x)$$

这正是可以把属于广义函数的 δ-函数，看作普通函数的弱极限的理论根据.

例 1.33 证明亥维赛(Heaviside)单位函数

$$H(x)=\begin{cases}0 & 当\ x<0\ 时\\ 1 & 当\ x\geqslant0\ 时\end{cases}$$

作为广义函数其导数为

$$H'(x) = \delta(x)$$

证明 将普通函数 $H(x)$视为广义函数,再按广义函数的导数定义便知,对任一 $\varphi\in K$,

$$(H'(x),\varphi(x)) = -(H(x),\varphi'(x)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dx$$

$$= -\int_{0}^{+\infty}\varphi'(x)dx = \varphi(0) - \varphi(+\infty) = \varphi(0)$$

$$= (\delta(x),\varphi(x))$$

于是,按广义函数的定义便得

$$H'(x) = \delta(x)$$

例 1.33 所指出的事实,正是 § 1.4 所讨论的间断函数的导数的基础,现已借助于广义函数的理论给出了严格的证明.于是,§ 1.4 中关于间断函数的导数的所有结论,都可以据此得到严格的论证.

此外,基于本节关于广义函数及其导数以及 δ-函数的定义与广义函数的运算性质,可以给出在 § 1.5 中所述的 δ-函数的性质及其推论的严格证明.下面仅举几例,以示说明.

例 1.34 根据广义函数的导数定义以及 δ-函数的定义 1.24 可知,对任一 $\varphi\in K$,恒有

$$(\delta^{(n)}(x),\varphi(x)) = (-1)^n(\delta(x),\varphi^{(n)}(x)) = (-1)^n\varphi^{(n)}(0)$$

$$(n = 1,2,\cdots)$$

类似地,对任一 $\varphi\in K$ 恒有

$$(\delta^{(n)}(x-\xi),\varphi(x)) = (-1)^n(\delta(x-\xi),\varphi^{(n)}(x)) = (-1)^n\varphi^{(n)}(\xi)$$

$$(n = 1,2,\cdots)$$

这便是 § 1.5 中性质 1.3 的确切含意及其严格证明.

例 1.35 根据定义 1.29 以及定义 1.24 至定义 1.27,并由例 1.34 可知,若 $\varphi_0\in K$,则对任一 $\varphi\in K$,恒有

$$(\varphi_0(x)\delta'(x),\varphi(x)) = (\delta'(x),\varphi_0(x)\varphi(x)) = -(\delta(x),(\varphi_0(x)\varphi(x))')$$

$$= -\varphi_0'(0)\varphi(0) - \varphi_0(0)\varphi'(0)$$

$$= \varphi_0(0)[-\varphi'(0)] - \varphi'_0(0)\varphi(0)$$

$$= \varphi_0(0)(\delta'(x),\varphi(x)) - \varphi'_0(0)(\delta(x),\varphi(x))$$

$$=(\varphi_0(0)\delta'(x)-\varphi'_0(0)\delta(x),\varphi(x))$$

于是，由定义 1.23

$$\varphi_0(x)\delta'(x)=\varphi_0(0)\delta'(x)-\varphi'_0(0)\delta(x)$$

类似地，可以证明

$$\varphi_0(x)\delta'(x-\xi)=\varphi_0(\xi)\delta'(x-\xi)-\varphi'_0(\xi)\delta(x-\xi)$$

这便是 § 1.5 中性质 1.6 的确切含意及其严格证明.

例 1.36 仿例 1.35 可以严格证明 § 1.5 中的性质 1.8. 此性质确切地应该陈述为：若 $\varphi_0(x)\in K$，则

$$\varphi_0(x)\delta^{(n)}(x-\xi)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\varphi_0^{(k)}(\xi)\delta^{(n-k)}(x-\xi) \quad (1\text{-}68)$$

根据定义 1.29 以及定义 1.24 至定义 1.27，再由普通函数乘积的莱布尼兹(Leibnitz)微商公式及例 1.34 可知，对任一 $\varphi\in K$，

$$(\varphi_0(x)\delta^{(n)}(x-\xi),\varphi(x))=(\delta^{(n)}(x-\xi),\varphi_0(x)\varphi(x))$$

$$=(-1)^n(\delta(x-\xi),(\varphi(x)\varphi_0(x))^{(n)})$$

$$=(-1)^n[\varphi_0(x)\varphi(x)]^{(n)}|_{x=\xi}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k\varphi_0^{(k)}(\xi)\varphi^{(n-k)}(\xi)$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k\varphi_0^{(k)}(\xi)(-1)^{n-k}(\delta^{(n-k)}(x-\xi),\varphi(x))$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\varphi_0^{(k)}(\xi)\delta^{(n-k)}(x-\xi),\varphi(x)\right)$$

于是，再按广义函数的定义便知(1-68)式成立.

下面，我们避开例 1.33 所指出的结论，从另一角度，根据广义函数理论，对间断函数的求导问题作进一步的讨论.

例 1.37 设 $x_m(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为实数轴上依序排列的一列弧立点，且 $\lim\limits_{m\to\pm\infty}x_m=\pm\infty$. 假定 $f(x)$于开区间$(x_m,x_{m+1})(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$内任意次可微，且 $f^{(n)}(x)(n=0,1,2,\cdots)$皆以 $x_m(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为第一类间断点，即 $\lim\limits_{x\to x_m^-}f^{(n)}(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_m^+}f^{(n)}(x)$都存在. 将 $f(x)$（即 $f^{(0)}(x)$）与 $f^{(n)}(x)(n=1,2,\cdots)$所对应的 K 上的广义函数分别记为$[f]$与$[f^{(n)}]$，并记$[f]^{(n)}$为广义函数$[f]$的 n 阶微商. 设 $J_m^{(n)}$ 为$f^{(n)}(x)$于 $x_m(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$处的跃度，即

$$J_m^{(s)} = f^{(s)}(x_m + 0) - f^{(s)}(x_m - 0)$$

则

$$[f]^{(n)} = [f^{(n)}] + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{p+q=n-1} J_m^{(p)} \delta^{(q)}(x - x_m) \tag{1-69}$$

特别，

$$[f]' = [f'] + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m \delta(x - x_m) \tag{1-70}$$

由此可见，具有第一类间断点的函数的广义微商由两部分迭加而成：第一部分体现所论函数的普通微商，而第二部分则正反映所论函数的间断特性，其数学表现为 δ-函数或其微商的线性组合.

我们先证明(1-70)式. 根据定义 1.29 及普通函数的分部积分公式，对任一 $\varphi \in K$，有

$$\begin{aligned}
([f]', \varphi) &= -([f], \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\sum_{m=-\infty}^{-\infty} \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\sum_{m=-\infty}^{-\infty} \{f(x_{m+1} - 0)\varphi(x_{m+1}) - f(x_m + 0)\varphi(x_m)\} \\
&\quad + \sum_{m=-\infty}^{-\infty} \int_{x_m}^{x_{m+1}} f'(x)\varphi(x)dx \\
&= \sum_{m=-\infty}^{-\infty} f(x_m + 0)\varphi(x_m) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x_{m+1} - 0)\varphi(x_{m+1}) \\
&\quad + \int_{-\infty}^{-\infty} f'(x)\varphi(x)dx
\end{aligned} \tag{1-71}$$

令 $m+1=k$，则

$$\sum_{m=-\infty}^{-\infty} f(x_{m+1} - 0)\varphi(x_{m+1}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x_k - 0)\varphi(x_k) \tag{1-72}$$

再将(1-72)式右端的 k 记为 m，并代入(1-71)式，并根据定义 1.24 至定义 1.27 便得

$$([f]', \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x_m + 0)\varphi(x_m) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x_m - 0)\varphi(x_m)$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m\varphi(x_m)+\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(\delta(x-x_m),\varphi(x))+([f'(x)],\varphi(x))$$

$$=\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m\delta(x-x_m)+[f'(x)],\varphi(x)\right)$$

于是，由定义 1.23 便知(1-70)式成立. 至于(1-69)式，则由(1-70)式并根据数学归纳法就不难得证.

不难看出，(1-70)式正是§1.5 中的性质 1.10 的确切陈述. 于是，这里给出了该性质的严格证明.

自从本世纪 30 年代，索波列夫(Соболев)在深入研究微分方程的某些问题时引入广义函数的方法以来，广义函数论得到了迅猛的发展. 它不仅在数学领域内，而且在物理及工程技术等方面都有着广泛的应用. 而早在本世纪 20 年代由狄拉克(Dirac)所引进的 δ-函数，则不仅是广义函数的典型范例，而且促进了广义函数论的发展，同时，广义函数论也为 δ-函数奠定了严格的数学基础.

这里，我们只是为了简单介绍 δ-函数的数学理论才不得不涉及广义函数论中一些必要的知识. 至于这方面其它更深入的内容，则不再赘述.

第二章　杜哈美(Duhamal)原理

初看本章，似乎觉得与 δ-函数关系不大. 然而，经过我们逐步深入的讨论，读者则不难看到，正是由于 δ-函数的鲜明的物理背景和重要的运算性质，才在迭加原理的基础之上建立起杜哈美原理. 我们在这章里，也正是想通过论述杜哈美原理，指出 δ-函数的重要作用.

§2.1　迭加原理

在物理学中，有许多物理量具有如下共同的物理属性：若干个物理量同时存在所产生的总体效应，与其单独存在时各自产生的分效应的迭加等效. 例如，若干个点电荷同时存在时所产生的电位，就等效于其中每个点电荷单独存在时各自所产生的电位的迭加. 这正是数学上的迭加原理的物理背景.

迭加原理是处理线性问题不可缺少的重要工具，同时，也非常奏效. 由于线性问题在实际问题中的广泛应用，特别是对某些非线性问题，也可以利用所谓线性化的方法，将其转化为线性问题来处理，因此，迭加原理无论是在理论上，还是在实际应用中，都具有相当重要的作用. 尤其是在线性微分方程的研究中，迭加原理对许多基本问题的研究都起了奠基的作用.

为了本书后面的应用，这里仅以典型的数学物理方程中的弦振动方程为例，来阐述迭加原理.

迭加原理 2.1　设 $u_k(x, t)(k=1,2,\cdots,n)$是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_k(x,t) \qquad (x \in E,\ t \in I) \tag{2-1}$$

的解. 其中 E 与 I 分别为变量 x 与 t 的变化区间. 则对于任意 n 个常数 $C_k(k=1,2,\cdots,n)$，$u(x,t)=\sum_{k=1}^{n}C_ku_k(x,t)$仍为方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^{n}C_kf_k(x,t) \quad (x\in E,\ t\in I) \qquad (2\text{-}2)$$

的解.

证明 将 $u(x,t)=\sum_{k=1}^{n}C_ku_k(x,t)$代入(2-2)，并注意到 C_k 是常数及 $u_k(x,t)$是(2-1)之解的假设条件，便立即得证.

推论 2.1 设 $u_k(x,t)\quad(k=1,2,\cdots,n)$是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (x\in E,\ t\in I)$$

的解. 其中 E 与 I 分别为变量 x 与 t 的变化区间. 则对于任意 n 个常数 $C_k(k=1,2,\cdots,n)$而言，$u(x,t)=\sum_{k=1}^{n}C_ku_k(x,t)$仍是该方程的解.

迭加原理 2.2 设 $u_k(x,t)\quad(k=1,2,\cdots)$是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_k(x,t) \quad (x\in E,t\in I)$$

的解. 其中 E 与 I 分别为变量 x 与 t 的变化区间. 若对于常数 $C_k(k=1,2,\cdots)$，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}C_ku_k(x,t)$与 $\sum_{k=1}^{\infty}C_kf_k(x,t)$皆于域 $G=\{(x,t)\,|\,x\in E,\ t\in I\}$上收敛，并且级数 $\sum_{k=1}^{\infty}C_ku_k(x,t)$对 x 与 t 皆可逐项微商两次，则 $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_ku_k(x,t)$为方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^{\infty}C_kf_k(x,t) \qquad (x\in E,\ t\in I) \qquad (2\text{-}3)$$

的解.

证明 根据假设条件，只须将 $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_ku_k(x,t)$代入(2-3)便不难得证.

推论 2.2 设 $u_k(x,t)\quad(k=1,2,\cdots)$是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (x \in E,\ t \in I)$$

的解. 其中 E 与 I 分别是变量 x 与 t 的变化区间. 若对于常数 $C_k(k=1,2,\cdots)$, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k(x,t)$ 于域 $G=\{(x,t)\,|\,x\in E,\ t\in I\}$ 上收敛，且对 x 与 t 皆可逐项微商两次，则 $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k(x,t)$ 仍是该方程的解.

迭加原理 2.3 设 $u(x,t,M)$, 对任何 $M\in\mathscr{M}$ 是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t,M) \qquad (x \in E,\ t \in I)$$

的解. 其中 $M=(M_1,\ M_2,\ \cdots,M_n)$ 是含 n 个参数的参数族. 而 $\mathscr{M}$ 为 R^n 中某个区域；E 与 I 分别是变量 x 与 t 的变化区间. 若积分

$$\iint\limits_{\mathscr{M}}\cdots\int u(x,t,M)dM_1dM_2\cdots dM_n \tag{2-4}$$

与

$$\iint\limits_{\mathscr{M}}\cdots\int f(x,t,M)dM_1,\ dM_2\cdots dM_n \tag{2-5}$$

对任一 $(x,t)\in G=\{(x,t)\,|\,x\in E,\ t\in I\}$ 皆存在，并且积分(2-4)对 x 与 t 均可在积分号下微商两次，则

$$u(x,t) = \iint\limits_{\mathscr{M}}\cdots\int u(x,t,M)dM_1dM_2\cdots dM_n$$

必为方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \iint\limits_{\mathscr{M}}\cdots\int f(x,t,M)dM_1dM_2\cdots dM_n \tag{2-6}$$

的解.

证明 将积分(2-4)代入方程(2-6)，再根据假设条件，便立即得证.

推论 2.3 设 $u(x,t,M)$ 对任何 $M\in\mathscr{M}$ 都是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (x \in E,\ t \in I)$$

的解. 其中 $M=(M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_n)$ 是含 n 个参数的参数族，而 $\mathscr{M}$ 为 R^n 中某个区域；E 与 I 分别为变量 x 与 t 的变化区间. 若积

分 $\iint\cdots\int u(x,t,M)dM_1dM_2\cdots dM_n$ 对任一 $(x,t)\in G=\{(x,t)\mid x\in E,t\in I\}$ 皆存在，且对 x 与 t 皆可在积分号下微商两次，则

$$u(x,t)=\iint_{\mathscr{M}}\cdots\int u(x,t,M)dM_1,dM_2\cdots dM_n$$

仍是该方程的解.

上述迭加原理 2.1 至 2.3 及其相应的推论，分别表述了有限形式、级数形式和积分形式的迭加原理. 它们之间明显的差别和深刻的联系，读者略加思索便不难领悟.

§2.2 一些简例的启示

在引述 Duhamal 原理之前，我们先举几个有关常微分方程的简单例子，这些例子将不仅在数学上，而且也在物理上使我们既可以料知 Duhamal 原理在数理方程中的一般表达形式，又可以初步了解此原理的实质.

例 2.1 考察一阶非齐次方程的初值问题

$$(A)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt}+p(t)y=f(t) & (2\text{-}7)\\ y|_{t=0}=0 & (2\text{-}8)\end{cases}$$

由常数变易法易得(2-7)的通解为

$$y(t)=Ce^{-\int_0^t p(\tau)d\tau}+\int_0^t f(\tau)e^{-\int_\tau^t p(s)ds}d\tau$$

其中 C 为任意常数. 再由初始条件(2-8)可知 $C=0$. 于是，初值问题(A)的解为

$$y(t)=\int_0^t f(\tau)e^{-\int_\tau^t p(s)ds}d\tau \tag{2-9}$$

若记：

$$v(t,\tau)=f(\tau)e^{-\int_\tau^t p(s)ds} \tag{2-10}$$

则易知 $v=v(t,\tau)$ 满足初值问题

$$(B)\qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + p(t)v = 0 \\ v\big|_{t=\tau} = f(\tau) \end{cases}$$

这表明：

1° 为求一阶非齐次线性方程的满足初始时刻 $t=0$ 时，齐初始条件的解 $y=y(t)$，只须先求出与(2-7)式相对应的齐次方程在初始时刻为 $t=\tau$，初始条件为(2-7)式中的非齐次项在 $t=\tau$ 时之值的解 $v=v(t,\tau)$. 而后，再由 0 到 t 对 τ 积分便可得到，即

$$y(t) = \int_0^t v(t,\tau)d\tau$$

2° (2-9)式与(2-10)式揭示了定解问题(A)和(B)的解之间，有着深刻的内在联系——(A)的解是(B)的解的(积分形式的)迭加.

上述求定解问题(A)之解的方法，表面上看似乎麻烦了，其实，这种方法恰好避免了直接处理(A)时所涉及到的非齐次方程(2-7)的复杂的求解过程. 而将其分解为一系列简单问题(B)之解的迭加(积分).

例 2.2 设具有单位质量的质点，在力 $f(t)$的作用下，沿 x 轴运动，若于初始时刻 $t=0$ 时，质点位于原点 $x=0$，并处于静止状态. 试考察此质点的运动规律.

解 按牛顿第二定律，若设所求质点的运动规律为 $x=x(t)$，则有

$$(C)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t) & (2\text{-}11) \\ x\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0 & (2\text{-}12) \end{cases}$$

容易看出方程(2-11)的通解为

$$x = C_1 + C_2 t + \int_0^t ds \int_0^s f(\tau)d\tau$$

其中 C_1、C_2 为任意常数. 再由初始条件(2-12)便知 $C_1=C_2=0$. 据此，并交换积分次序，立即可得初值问题(C)的解为

$$x = \int_0^t ds \int_0^s f(\tau)d\tau = \int_0^t d\tau \int_\tau^t f(\tau)ds$$

$$=\int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{2-13}$$

若记

$$v(t,\tau)=(t-\tau)f(\tau) \tag{2-14}$$

则易知 $v=v(t,\tau)$ 为初值问题

$$(D)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2v}{dt^2}=0 \\ v\Big|_{t=\tau}=0, \quad \dfrac{dv}{dt}\Big|_{t=\tau}=f(\tau) \end{cases}$$

的解.

可见，为了求初值问题(C)的解 $x=x(t)$，只须求出初值问题(D)的解 $v=v(t,\tau)$，再作积分便可得到，即

$$x(t)=\int_0^t v(t,\tau)d\tau$$

而初值问题(D)与(C)的关系则是：(D)中所含方程是(C)中所含非齐次方程相对应的齐次方程；(D)中初始条件则是将(C)中的初始时刻 $t=0$ 及质点运动所满足的齐次初始条件，变为初始时刻 $t=\tau$ 时，质点的初始位置在原点，初速度为质点所受的外力$f(t)$(即(C)中的非齐次项)在 $t=\tau$ 处的值 $f(\tau)$. 而(C)的解则是(D)的解的(积分形式)迭加.

下面我们将从问题的物理背景出发，对初值问题(C)与(D)及其解之间的关系进行讨论，以便对上述方法的物理意义，能够有比较深入的理解.

初值问题(C)中方程(2-11)的右端 $f(t)$，是由时刻 $t=0$ 到时刻(时刻 t 之后的外力作用自然不会影响质点于时刻 t 的运动)持续作用于质量为 1 的质点上的外力. 该持续力 $f(t)$可以看成一串相继的瞬时力的迭加. 按 δ-函数的物理意义有

$$f(t)=\int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{2-15}$$

其实，这也正是 δ-函数的运算性质. 于是，如若在瞬时力 $f(\tau)\delta(t-$

$\tau)d\tau$ 的作用下，质点的位移为 $v(t,\tau)d\tau$，则由(2-15)式及迭加原理[*]知，初值问题(C)的解 $x=x(t)$是初值问题

$$(E)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2v}{dt^2}=f(t)\delta(t-\tau) \\ v\big|_{t=0}=0, \qquad \dfrac{dv}{dt}\Big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

之解 $v=v(t,\tau)$的(积分形式)迭加，即

$$x(t)=\int_0^t v(t,\tau)d\tau \tag{2-16}$$

按问题的物理意义可知，初值问题(E)所描述的是：只在时刻 $t=\tau$ 的瞬时起作用的瞬时力的作用下，在初始时刻 $t=0$ 时，位于坐标原点，同时又处于静止状态的单位质量的质点的运动规律. 由于直到时刻 $t=\tau-0$，瞬时力 $f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 从而 $f(\tau)\delta(t-\tau)$[**]还没来得及起作用，因此，对于(E)所描述的只在 $t=\tau$ 时的瞬时力的作用下的质点运动而言，直到时刻 $t=\tau-0$，质点仍应在坐标原点并保持其原来的静止状态. 即

$$v\big|_{t=\tau-0}=0 \quad , \quad \frac{dv}{dt}\Big|_{t=\tau-0}=0 \tag{2-17}$$

换言之，初值问题(E)可写成

$$(F)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2v}{dt^2}=f(\tau)\delta(t-\tau) \\ v\big|_{t=\tau-0}=0, \ \dfrac{dv}{dt}\Big|_{t=\tau-0}=0 \end{cases}$$

然而，当时刻 t 由 $\tau-0$ 跃到 $\tau+0$ 时，对于(E)也即(F)所描述的质点运动而言，瞬时力 $f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 从而 $f(\tau)\delta(t-\tau)$却正好起作用. 于是，于初值问题(F)中方程两端对 t 由 $\tau-0$ 到 $\tau+0$ 积分，并根据 δ-函数的性质 1.1 便得

---

* §2.1 中是针对数学物理方程所引述的迭加原理. 但是，对常微分方程来说，显然还是成立的. 这里虽然多了初始条件，但由于所论的初始条件都是齐的，因此，对迭加原理的结论显然是无妨的.

** 此处是指其数值，而其量纲并非力的量纲. 以下该量的意义均如此.

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{\tau+0}-\left.\frac{dv}{dt}\right|_{\tau-0}=\int_{\tau-0}^{\tau+0}f(\tau)\delta(t-\tau)dt$$
$$=f(\tau)\int_{\tau-0}^{\tau+0}\delta(t-\tau)dt=f(\tau)$$

再由(2-17)式知

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{\tau+0}=f(\tau) \tag{2-18}$$

由于(F)所描述的只是质点在$t=\tau$时受瞬时力的作用的运动规律. 因此，当时刻t由$\tau-0$跃到$\tau+0$时，虽然此瞬时力可引起质点运动速度的突变，但质点的位移却来不及变化. 于是，由(2-17)式可知

$$v|_{\tau+0}=0 \tag{2-19}$$

然而，从$t=\tau+0$起，瞬时力$f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$已失去作用. 所以，从$t=\tau+0$起(即$t>\tau$时)描述上述质点运动的方程应是齐次方程，即此时$(F)$中所含方程应变为

$$\frac{d^2v}{dt^2}=0 \qquad (t>\tau) \tag{2-20}$$

由(2-18)至(2-20)诸式可见，当$t\geqslant\tau$时(F)可写成

$$(H)\qquad \begin{cases}\dfrac{d^2v}{dt^2}=0 \qquad (t>\tau)\\[2mm] v|_{t=\tau+0}=0,\ \left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{t=\tau+0}=f(\tau)\end{cases}$$

(2-18)式(更确切地说是由初值问题(E)到(H))有着明显的物理意义，它表明质点在瞬时力(或称脉冲力)的作用下获得速度，且容易看出，初值问题(H)与(D)是完全一样的. 事实上，在(H)与(D)中，由于$t\geqslant\tau$,所以(D)中的初始时刻$t=\tau$照理应理解为$t=\tau+0$. 从而既使将(H)中的初始时刻$t=\tau+0$写成$t=\tau$，也该按其本意来理解. 据此，并注意到(E)、(F)、(H)之间的关系及(2-16)式可知:我们按照问题的物理意义所得到的(C)与(D)的解之间的关系，与前面通过数学推导所获得的结果是完全一致的. 不过，我们就其问题的物理背景所进行的讨论，则可对其结论的物理意义有更为深刻的理

解，从而对结论所展示的方法——杜哈美原理，能够更透彻地掌握.

为了说明上述方法具有更为广泛的适应性，我们再举一个二阶线性常微分方程初值问题的例子：

例 2.3 求二阶线性非齐次方程的初值问题

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}+p(t)\dfrac{dy}{dt}+q(t)y=f(t) & \text{(2-21)} \\ y|_{t=0}=0,\ \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0 & \text{(2-22)} \end{cases}$$

的解.

解 设已知与非齐次线性方程(2-21)相应的齐次方程

$$\frac{d^2y}{dt}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0$$

的两个线性无关的解为 $\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，则由参数变易法以及通解结构定理不难求得(2-21)的通解为

$$y(t)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+\int_0^t\frac{\varphi_1(\tau)\varphi_2(t)-\varphi_2(\tau)\varphi_1(t)}{\varphi_1(\tau)\varphi'_2(\tau)-\varphi_2(\tau)\varphi'_1(\tau)}f(\tau)d\tau$$

其中 C_1，C_2 为任意常数. 将初始条件(2-22)代入上式便得 $C_1=C_2=0$，从而，初值问题(I)的解为

$$y(t)=\int_0^t\frac{\varphi_1(\tau)\varphi_2(t)-\varphi_2(\tau)\varphi_1(t)}{\varphi_1(\tau)\varphi'_2(\tau)-\varphi_2(\tau)\varphi'_1(\tau)}f(\tau)d\tau$$

若记

$$v(t,\tau)=\frac{\varphi_1(\tau)\varphi_2(t)-\varphi_2(\tau)\varphi_1(t)}{\varphi_1(\tau)\varphi'_2(\tau)-\varphi_2(\tau)\varphi'_1(\tau)}f(\tau)$$

则不难验证 $v=v(t,\tau)$满足初值问题：

$$(J)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2v}{dt^2}+p(t)\dfrac{dv}{dt}+q(t)v=0 \\ v|_{t=\tau}=0,\quad \left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{t=\tau}=f(\tau) \end{cases}$$

于是，象前两个例子一样，这里提供了一个一般二阶线性非齐次方程具有齐初始条件的初值问题(I)的一般解法：即先求出含齐方程非齐次初始条件的初值问题(J)的解 $v=v(t,\tau)$，则此解的(积

分形式)迭加

$$y(t)=\int_0^t v(t,\tau)d\tau$$

便是(I)的解.

总之，上述三个例题，所提供的解题方法之所以行之有效，在于它把求解含非齐次方程的初值问题,转化为求解含齐次方程的初值问题,从而避免了直接处理原初值问题时所涉及的复杂的求解过程. 这样表面上虽然也多了一层迭加(积分)手续，但这除了作一次形式运算外，并不带来任何麻烦.

上述三例在解法上的共性，不仅为提供一个有益的方法——求解线性常微分方程初值问题的杜哈美原理，奠定了基础；而且，特别对我们即将讨论的，有关典型的数理方程的杜哈美原理，无论是从数学表达还是物理论证上，都提供了重要的线索. 这也正是我们列举上述三例的目的所在.

§ 2.3 杜哈美(Duhamal)原理*

2.3.1 杜哈美(Duhamal)原理及其证明

在前节所列诸例的启示下，我们便不难理解把求解含非齐方程的定解问题,转化为求解含相应的齐次方程的定解问题的杜哈美原理了.

为了简便，我们先针对一维波动方程为例来陈述.

定理 2.1 设 $f(x,t)$于 $0\leqslant x\leqslant l$, $t\geqslant 0$ 上连续,$V=V(x,t,\tau)$是定解问题

$$(A)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad (0<x<l,0<\tau<t) & (2\text{-}23)\\ V|_{x=0}=0,\quad V|_{x=l}=0 \qquad (0<\tau\leqslant t) & (2\text{-}24)\\ V|_{t=\tau}=0,\quad \left.\dfrac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=\tau}=f(x,\tau) \qquad (0\leqslant x\leqslant l) & (2\text{-}25)\end{cases}$$

* 本节以及后面所用到的有关数理方程的知识,请读者查阅本书后面提供的有关参考书.

于 $0\leqslant x\leqslant l, 0<\tau\leqslant t$ 上的关于(x,t,τ)连续，且关于 x 及 t 的二阶偏导数连续的解. 则

$$u(x,t)=\int_0^t V(x,t,\tau)d\tau \tag{2-26}$$

便是定解问题

$$(B)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) & (0<x<l,\ t>0) & (2\text{-}27)\\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0 & (t\geqslant 0) & (2\text{-}28)\\ u|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & (0\leqslant x\leqslant l) & (2\text{-}29)\end{cases}$$

的解.

证明　注意到由条件(2-25)，不难证明

$$V(x,t,t)=0\qquad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{\tau=t}=f(x,t)$$

再根据 $V(x,t,\tau)$于 $0\leqslant x\leqslant l,\ t\geqslant\tau\geqslant 0$ 上两次连续可微，从而按含参变量积分和有变动上限的积分的微商定理，根据(2-26)式可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=V(x,t,t)+\int_0^t\frac{\partial V(x,t,\tau)}{\partial t}d\tau=\int_0^t\frac{\partial V(x,t,\tau)}{\partial t}d\tau \tag{2-30}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left.\frac{\partial V(x,t,\tau)}{\partial t}\right|_{\tau=t}+\int_0^t\frac{\partial^2 V(x,t,\tau)}{\partial t^2}d\tau=f(x,t)+\int_0^t\frac{\partial^2 V(x,t,\tau)}{\partial t^2}d\tau$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_0^t\frac{\partial^2 V(x,t,\tau)}{\partial x^2}d\tau$$

从而，再由(2-23)式可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)d\tau=f(x,t)$$

这表明(2-26)式满足方程(2-27)式. 再由(2-24)式可知

$$u(x,t)|_{x=0}=\int_0^t V(0,t,\tau)d\tau=0$$

$$u(x,t)|_{x=l}=\int_0^t V(l,t,\tau)d\tau=0$$

即(2-26)也满足边界条件(2-28). 此外，显然有

$$u(x,t)|_{t=0}=0$$

再由(2-30)式可见

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

这表明(2-26)式满足初始条件(2-29)式.

综上所述，(2-26)是定解问题(B)的解.

杜哈美原理对于热传导方程也完全适用，仍以一维的情形为例来陈述.

定理 2.2 设 $f(x,t)$于 $0\leqslant x\leqslant l$, $t\geqslant 0$ 上连续，$V(x,t,\tau)$是定解问题

$$(C)\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} & (0<x<l,t>\tau>0)\\ V|_{x=0}=0,\quad V|_{x=l}=0 & (t\geqslant\tau>0)\\ V|_{t=\tau}=f(x,\tau) & (0\leqslant x\leqslant l)\end{cases}$$

的于 $0\leqslant x\leqslant l$, $t\geqslant\tau>0$ 上，对(x,t,τ)连续，对 x 的二阶偏导数连续，对 t 的一阶偏导数连续的解. 则

$$u(x,t)=\int_0^t V(x,t,\tau)d\tau \tag{2-31}$$

便是定解问题

$$(D)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

的解.

定理 2.2 的证明完全类似于定理 2.1 的证明，故从略.

2.3.2 杜哈美(Duhamal)原理的实质、意义及其适用范围

综合前节的诸例及本节定理，杜哈美原理的实质和意义可归纳如下：

1° 杜哈美原理在数学上脱胎于常微分方程中参数变易法.

2° 本节定解问题(A)、(C)分别与(B)、(D)的关系，有如前节各例中所启示的那样相类似的结论. 即(B)为含非齐次方程齐次边界条件齐次初始条件的定解问题，初值为 $t=0$；(A)为含相应的齐次方

程齐边界条件，而初始条件则是非齐次的定解问题，初值为 $t=\tau\geqslant 0$. 至于(D)与(C)则有完全类似的关系. 不仅如此，(B)与(D)中的非齐次项，还分别化到(A)、(C)初始条件中对 t 的最高阶微商所附加的条件上(由于后者的初始时刻为 $t=\tau$，所以，前者的非齐次项化到后者的初始条件上时，其中的时间变量 t 应改之以 τ).

3° 定解问题(B)中所含波动方程的非齐次项 $f(x,t)$，是与外力有关的量，称为外力项. 于是(B)与(A)的关系，则是把(B)中的外力化到(A)中的初速上. 对于含高维波动方程的定解问题而言，也是如此. 于是，将杜哈美原理用于解波动方程的定解问题时，也称之为外力化为初速原理. 在下节讨论杜哈美原理的物理意义时，我们将会看到外力化初速的物理依据. 这对深入理解和掌握外力化初速原理的实质，肯定将是有益的. 至于(D)中所含非齐次项$f(x,t)$，则是与热源有关的量. 于是，(D)与(C)的关系，则可说是把(D)中热源化到(C)中的初始温度上. 其物理依据也将从原理的物理意义中获知.

4° 从上节诸例可见，(2-26)式表明，定解问题(B)之解乃是定解问题(A)的解的(积分形式的)迭加. 这不仅揭示了杜哈美原理的实质是迭加原理；而且，还提供了解此类定解问题的行之有效的方法——即把直接处理含非齐次方程的定解问题(B)的较为复杂的求解过程，转化为求只含有齐次方程的定解问题(A)的较为简单的求解过程. 只不过形式上再多一道积分运算手续而已；而基于(2-31)式，定解问题(D)与(C)的解之间，也有与上述雷同的关系.

杜哈美原理的适用范围如下：

1. 为简便起见，定理 2.1、定理 2.2 才就一维情形来陈述的. 其实，它们对于高维的情形显然也成立.

2. 杜哈美原理只适用于含波动方程或热传导方程的定解问题；不适用于含位势方程的定解问题. 换句话说，只适用于与时间变量有关(即描述非稳定过程)的定解问题，而不适用于与时间变量无关(即描述稳定过程)的定解问题.

3. 杜哈美原理既适用于混合问题，也适用于初值问题. 在混合问题中，无论空间变量是有界的，还是半无界的情形，该原理都适用.

4. 鉴于杜哈美原理的实质在于迭加原理，而且其迭加的积分形式中，积分变量与空间变量无关. 因此，若针对混合问题应用杜哈美原理，则要求该问题所包含的边界条件为齐次边界条件(否则，一定要先齐次化后再应用杜哈美原理).

§2.4 杜哈美(Duhamal)原理的物理意义

这节我们将从问题的物理背景出发，对杜哈美原理进行更进一步的讨论. 讨论时将遵循§2.2中例2.2所启示的途径，先对§2.3中的定理2.1进行物理论证. 从数学上看，这种论证虽然不太严格，但是，却能较为深刻地揭示杜哈美原理的物理意义. 此外，这种论证还与δ-函数深刻地联系在一起. 为了突出其物理意义，人们常把这种方法称为冲量定理法.

考虑两端固定的，密度为ρ的均匀弦的受迫振动问题. 设其两端固定于x轴上的$x=0$，$x=l$处，而且在初始时刻$t=0$时，此绷紧的弦静止地置于x轴上. 若于时刻t作用于弦上点x处的横向外力的力密度为$F(x,t)$. 若设弦上点x处，于时刻t的位移为$u(x,t)$，则此位移函数$u(x,t)$必满足§2.3定理2.1中的定解问题(B)，其中

$$F(x,t) = \rho f(x,t) \tag{2-32}$$

以上述物理问题为背景，我们对§2.3的定理2.1进行物理论证. 由于外力$F(x,t)$，是由初始时刻0到时刻t，于点x处持续起作用的持续力(当然，在时刻t之后的外力作用不会影响弦于t时刻的位移)，该持续力可以看成是一串相继的瞬时力的迭加，按δ-函数的物理意义则有

$$F(x,t) = \int_0^t F(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

(其实这也正是δ-函数的运算性质). 据此，再按(2-32)式及ρ为常数可见

$$f(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{2-33}$$

设在瞬时力$F(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$的作用下，弦的位移函数为

$v(x,t,\tau)d\tau$，则由(2-32)、(2-33)式及迭加原理可知，定解问题(B)的解 $u=u(x,t)$ 是定解问题

$$
(A)_1\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,\tau)\delta(t-\tau) & (0<x<l,\ t>0)\\
v\big|_{x=0}=0,\ v\big|_{x=l}=0 & (t\geqslant 0)\\
v\big|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 & (0\leqslant x\leqslant l)
\end{cases}
\tag{2-34}
$$

之解 $v=v(x,t,\tau)$（积分形式）的迭加，即

$$
u(x,t)=\int_0^t v(x,t,\tau)d\tau \tag{2-35}
$$

据此，就把求解定解问题(B)转化为求解定解问题$(A)_1$.

由于定解问题$(A)_1$所描述的，只是在瞬时力 $\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 的作用下，两端点固定于 x 轴上的点 $x=0$ 与 $x=l$，且于初始时刻处于静止状态，以 $v(x,t,\tau)d\tau$ 表示其位移函数的绷紧的弦的振动问题，须知，由时刻 $t=0$ 到 $t=\tau-0$，瞬时力 $\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 一直未起作用，所以直到 $t=\tau-0$ 时，此弦仍应保持原来的静止状态. 换言之由(2-34)式可知

$$
v\big|_{t=\tau-0}=0,\quad \frac{dv}{dt}\Big|_{t=\tau-0}=0 \tag{2-36}
$$

于是，初值问题$(A)_1$也可写成

$$
(B)_1\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,\tau)\delta(t-\tau) & (0<x<l,\ t>0)\\
v\big|_{x=0}=0,\quad v\big|_{x=l}=0 & (t\geqslant 0)\\
v\big|_{t=\tau-0}=0,\quad \dfrac{dv}{dt}\Big|_{t=\tau-0}=0 & (0\leqslant x\leqslant l)
\end{cases}
$$

由于瞬时力 $\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 当时刻 t 由 $\tau-0$ 跃到 $\tau+0$ 时恰好起作用，于是在$(B)_1$中所含方程的两端对 t 由 $\tau-0$ 到 $\tau+0$ 积分，根据 δ-函数的性质 1.1，得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=\tau+0}-\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=\tau-0}\\
&=a^2\int_{\tau-0}^{\tau+0}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dt+\int_{\tau-0}^{\tau+0}f(x,t)\delta(t-\tau)dt=f(x,\tau)
\end{aligned}
$$

再由(2-36)式可知

$$\frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=\tau+0}=f(x,\tau) \tag{2-37}$$

根据(2-36)式以及在瞬时力 $\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 的作用下，当 t 由 $\tau-0$ 到 $\tau+0$ 时位移函数 $v(x,t,\tau)d\tau$ 来不及变化的缘故，所以有

$$v|_{t=\tau+0}=0 \tag{2-38}$$

从时刻 $t=\tau+0$ 起，瞬时力 $\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 已失去作用. 所以，从 $t=\tau+0$ 起，描述弦振动的方程就应当是齐次方程，即此时 $(B)_1$ 中所含方程应改写成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (0\leqslant x\leqslant l,\ t>\tau) \tag{2-39}$$

由(2-37)、(2-38)、(2-39)式及 $(B)_1$ 中所含边界条件，可知，当 $t\geqslant\tau>0$ 时，$(B)_1$ 便变为

$$(C)_1\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (0<x<l,\ t>\tau)\\ v|_{x=0}=0,\ v|_{x=l}=0 & (t\geqslant\tau)\\ v|_{t=\tau+0}=0,\quad \dfrac{dv}{dt}\bigg|_{t=\tau+0}=f(x,\tau) & (0\leqslant x\leqslant l)\end{cases}$$

显而易见，由于在定理 2.1 的定解问题(A)与此处的定解问题 $(C)_1$ 中，都要求 $t\geqslant\tau$，所以，初始时刻写成 $t=\tau$ 与 $t=\tau+0$ 是意义相同的. 从而，(A)与 $(C)_1$ 是完全一样的定解问题. 据此，再注意到 $(A)_1$、$(B)_1$、$(C)_1$ 的关系以及(2-35)式可知，通过上面的物理论述也证明了定理 2.1 的结论. 这种证明尽管不够严格，但求解波动问题的杜哈美原理的物理意义却一清二楚. 特别值得强调的是(2-37)式(或者更确切地说，由定解问题 $(B)_1$ 到 $(C)_1$)的物理意义在于，它表明弦在瞬时力(或称脉冲力)的作用下获得的速度，正是外力化初速原理中的外力所以能化到初速上的物理依据.

至于 § 2.3 中定理 2.2 的物理证论，则是与上述论证相类似. 不过，两者的物理背景毕竟炯然不同. 因此，为了深入理解求解热传导问题的杜哈美原理的物理意义，将定理 2.2 的物理论证略述如下：

考虑置于 x 轴上长为 l，线密度为 ρ 的均匀细杆. 设其一端为 $x=0$，另一端为 $x=l$. 若于初始时刻 $t=0$ 时，此杆上任一点的温度均为零，而于杆的两端点的温度始终保持为零，且杆的单位长度上的热源强度为 $C\rho f(x,t)$($C=C(x)$是杆的比热).

如果设杆上点 x 处，于时刻 t 的温度为 $u(x,t)$，则此温度分布函数 $u(x,t)$满足 § 2. 3 定理 2. 2 中的定解问题(D). 我们将以此为背景，通过物理论证来证明定理 2. 2.

由于热源 $C\rho f(x,t)$从时刻 0 到时刻 t 持续作用(自然在时刻 t 以后的热源分布不会影响杆在 t 时刻的温度分布). 于是，完全类似于持续力与瞬时力之间的关系的分析，把持续的热源可以看成一系列相继的瞬时热源的迭加. 即

$$C\rho f(x,t)=\int_0^t C\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

从而有

$$f(x,t)=\int_0^t f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{2-40}$$

又设在瞬时热源 $C\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 的影响下，杆的温度分布为 $v(x,t,\tau)d\tau$，则由(2-40)式及迭加原理知，§ 2. 3 定理 2. 2 中的定解问题(D)之解 $u=u(x,t)$是定解问题

$$(D)_1\quad\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,\tau)\delta(t-\tau) & (0<x<l,\ t>0)\\ v|_{x=0}=0,\ v|_{x=l}=0 & (t\geqslant 0)\\ v|_{t=0}=0 & (0\leqslant x\leqslant l)\end{cases}$$

的解 $v=v(x,t,\tau)$的(积分形式)的迭加，即

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t,\tau)d\tau \tag{2-41}$$

这样，就把求解定解问题(D)的问题转化为求解$(D)_1$的问题.

定解问题$(D)_1$所描述的问题是：只在瞬时热源$C\rho f(x,\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau$的影响下，且两端点温度始终为零，杆内各点处当 $t=0$ 时初始温度为零，求有界杆的温度分布函数 $v(x,t,\tau)d\tau$ 的问题. 注意到由时刻 $t=0$ 到 $t=\tau-0$ 时，瞬时热源 $C\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 尚未产生

影响. 因此，由 $v|_{t=0}=0$ 和 $v|_{t=\tau-0}=0$ 可知，定解问题$(D)_1$可写成

$$(E)_1\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,\tau)\delta(t-\tau) & (0<x<l,\ t>0)\\ v|_{x=0}=0,\ v|_{x=l}=0 & (t\geqslant 0)\\ v|_{t=\tau-0}=0 & (0\leqslant x\leqslant l)\end{cases}\qquad(2\text{-}42)$$

由于瞬时热源 $C\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 当时刻 t 由 $\tau-0$ 跃到 $\tau+0$ 时，恰好产生影响，于是在$(E)_1$中所含方程两端对 t 由 $\tau-0$ 到 $\tau+0$ 积分，根据 δ-函数的性质 1.1 便得到

$$\begin{aligned}&v|_{t=\tau+0}-v|_{t=\tau-0}\\&=a^2\int_{\tau-0}^{\tau+0}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dt+\int_{\tau-0}^{\tau+0}f(x,t)\delta(t-\tau)d\tau=f(x,\tau)\end{aligned}$$

据此及(2-42)式立即可见

$$v|_{t=\tau+0}=f(x,\tau)\qquad(2\text{-}43)$$

从 $t=\tau+0$ 起，瞬时热源 $C\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 已失去影响，所以，从 $t=\tau+0$ 起描述杆的热传导问题$(E)_1$所包含的方程就应当成为齐次方程了. 由此及(2-43)式并注意到$(E)_1$所含的边界条件可知，当 $t\geqslant\tau$ 时，$(E)_1$可写为

$$(F)_1\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (0<x<l,\ t>\tau>0)\\ v|_{x=0}=0,\ v|_{x=l}=0 & (t\geqslant\tau>0)\\ v|_{t=\tau+0}=f(x,\tau) & (0\leqslant x\leqslant l)\end{cases}$$

显而易见，定解问题$(F)_1$与(C)是完全一样的. 至此，由$(D)_1$、$(E)_1$、$(F)_1$之间的关系及(2-41)式便知，通过上面的物理论述，也证明了定理 2.2 的结论. 这种物理论证虽然不甚严格，但是却深刻地揭示了求解热传导问题的杜哈美原理的物理意义；并且，值得指出的是，(2-43)式（或者更确切地说由$(E)_1$到$(F)_1$）的物理意义在于，它表明杆在所说的瞬时热源（或者称脉冲热源）的影响下，温度分布改变为 $f(x,\tau)$. 这正是把$(D)_1$中的热源转化为$(F)_1$中的初始温度上的物理依据.

我们已经多次指出，杜哈美原理的实质在于迭加原理. 而从上述物理的论证中，更清楚地看到，杜哈美原理所以可行，其关键在

于把持续起作用的物理量，分解成为一系列瞬时起作用的物理量的迭加；而持续起作用的量所产生的物理效果，与一系列瞬时起作用的量各自产生的物理效果的总和等效.这就从物理意义上进一步揭示了杜哈美原理的实质.应该强调的是，持续起作用的物理量，能够分解为瞬时起作用的物理量的迭加，起桥梁作用的，正是这个具有极好的运算性质和显明的物理背景的 δ-函数.

§2.5 杜哈美(Duhamal)原理的应用举例

为了具体说明如何应用杜哈美原理来处理数理方程的定解问题，我们来举几个例子：

例 2.4 设长度为 l，线密度为 ρ 的均匀细杆置于 x 轴上，其两端 $x=0$ 及 $x=l$ 处的温度于时刻 t 时皆为 $\sin 2t$. 假定此杆的内部无热源，且于初始时刻 $t=0$ 时，杆上的任一点的温度皆为零. 若设杆上在点 x 处于时刻 t 时的温度为 $u=u(x,t)$，则易见

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<l,\ t>0) \\ u|_{x=0} = \sin 2t, \quad u|_{x=l} = \sin 2t & (t\geqslant 0) \\ u|_{t=0} = 0 & (0\leqslant x\leqslant l) \end{cases}$$

鉴于(A)中所含边界条件为非齐次的，因而，先采用构造辅助函数的方法，将其化成齐次边界条件. 为此，显然只须取

$$\eta = \sin 2t$$

则 $w=u-\eta$ 必满足

$$(B)\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \cos 2t & (0<x<l,\ t>0) \\ w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0 & (t\geqslant 0) \\ w|_{t=0} = 0 & (0\leqslant x\leqslant l) \end{cases}$$

按杜哈美原理，为求定解问题(B)的解，我们先求解定解问题

$$(C)\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (0<x<l,\ t>\tau>0) \\ v|_{x=0} = 0,\ v|_{x=l} = 0 & (t\geqslant\tau>0) \\ v|_{t=\tau} = \cos 2\tau & (0\leqslant x\leqslant l) \end{cases}$$

采用分离变量法，再注意到定解问题(C)中的初始时刻为 $t=\tau$，经过简单的变量代换，便不难求得定解问题(C)的解为

$$v(x,t,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}[(-1)^n-1]\cos 2\tau e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)\pi}\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x$$

$$\cdot\cos 2\tau e^{-\left[\frac{(2k-1)\pi a}{l}\right]^2(t-\tau)}$$

于是，由杜哈美原理可知，定解问题(B)的解为

$$w=\int_0^t v(x,t,\tau)d\tau=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)\pi}\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x$$

$$\cdot e^{-\left[\frac{(2k-1)\pi a}{l}\right]^2 t}\int_0^t\cos 2\tau e^{\left[\frac{(2k-1)\pi a}{l}\right]^2\tau}d\tau$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)\pi\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{(2k-1)\pi a}{l}\right)^4\right]}\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x$$

$$\cdot\left\{\sin 2t+\frac{1}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi a}{l}\right)^2\left(\cos 2t-e^{-\left[\frac{(2k-1)\pi a}{l}\right]^2 t}\right)\right\}$$

故定解问题(A)的解为

$$u=w+\eta=\sin 2t-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x}{(2k-1)\pi\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{(2k-1)\pi a}{l}\right)^4\right]}$$

$$\cdot\left\{\sin 2t+\frac{1}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi a}{l}\right)^2\left(\cos 2t-e^{-\left[\frac{(2k-1)\pi a}{l}\right]^2 t}\right)\right\}$$

例 2.5 设线密度为 ρ 的均匀的无界弦，在时刻 $t=0$ 时，整个与 x 轴重合，且此时处于静止状态. 今于点 $x=0$ 处施以谐变力 $\rho\sin\omega t$. 试求此弦的振动规律.

解 显然，所施加的外力的力密度为 $\rho\sin\omega t\delta(x)$. 于是，若设此弦于时刻 t 在点 x 处的位移为 $u=u(x,t)$，则 $u(x,t)$ 应满足

$$(A)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin\omega t\delta(x) & (-\infty<x<+\infty,\quad t>0)\\ u|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

按杜哈美原理，为求解(A)，只须先求出定解问题

$$(B)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{x^2} & (-\infty<x<+\infty,\quad t>\tau>0)\\ v|_{t=\tau}=0,\quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=\tau}=\sin\omega\tau\delta(x) & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

的解 $v=v(x,t,\tau)$，则(A)的解便是

$$u=\int_0^t v(x,t,\tau)d\tau \tag{2-44}$$

关于定解问题(B)，我们将在第三章中用积分变换法给出其解法. 这里先列出定解问题(B)的解为

$$v(x,t,\tau)=\frac{\sin\omega\tau}{2a}\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)}\delta(x-\xi)d\xi \tag{2-45}$$

由(2-44)式便知，定解问题(A)的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\sin\omega\tau d\tau\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)}\delta(x-\xi)d\xi$$

例 2.6 求定解问题

$$(A)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t\sin x & (-\infty<x<+\infty,\ t>0)\\ u|_{t=0}=0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin x & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

的解.

解 依线性方程的解的结构，以及迭加原理可知，定解问题(A)的解是下列二定解问题的解的和

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,\ t>0)\\ u|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin x & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t\sin x & (-\infty<x<+\infty,\ t>0)\\ u|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

根据达朗贝尔公式知，(Ⅰ)的解为

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$
$$=0+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin\xi d\xi=\sin x\sin t$$

而定解问题(Ⅰ)，则由杜哈美原理知，先解定解问题

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty, t>\tau>0)\\ w|_{t=\tau}=0,\quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=\tau}=\tau\sin x & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

仍然应用达朗贝尔公式解定解问题(Ⅲ)，得

$$w(x,t,\tau)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x+at)+\varphi_2(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\tau\sin x dx$$
$$=\frac{\tau}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\sin x dx=\tau\sin x\sin(t-\tau)$$

于是定解问题(Ⅰ)的解为

$$u_2(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau=\int_0^t\tau\sin x\sin(t-\tau)d\tau$$
$$=\sin x\int_0^t\tau\sin(t-\tau)d\tau=(t-\sin t)\sin x$$

故定解问题(A)的解为

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)=\sin x\sin t+(t-\sin t)\sin x=t\sin x$$

例 2.7 设于整个 $oxyz$ 空间中，均匀分布的某种密度为 ρ，比热为 C 的物质，于该空间分布着单位体积上热源强度为 $C\rho f(x,y,z,t)$ 的热源. 若于时刻 $t=0$ 时，每点的初始温度皆为零，试求于时刻 t 在点 (x,y,z) 处的温度分布 $u(x,y,z,t)$.

解 根据物理意义，可知该定解问题为

$$(A)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)\\ \qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty,\ t>0)\\ u|_{t=0}=0 \qquad (-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}$$

按杜哈美原理，为了求定解问题(A)，则必须先求出定解问题

$$(B)\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ \qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty,\ t>\tau>0) \\ v|_{t=\tau}=f(x,y,z,t) \qquad (-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}$$

的解 $v=v(x,y,z,t,\tau)$，而(A)的解便是

$$u(x,y,z,t,\tau)=\int_0^t v(x,y,z,t,\tau)d\tau$$

和例 2.5 同样处理，定解问题(B)的具体解法将在第三章里给出，这里仅指出(B)的解为

$$v(x,y,z,t,\tau)=\frac{1}{8a^3[\pi(t-\tau)]^{3/2}}$$

$$\cdot\iiint_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z,\tau)e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\eta d\zeta$$

于是，定解问题(A)的解为

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z,t)e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\eta d\zeta$$

从上述诸例可见，杜哈美原理不仅适用于处理混合问题，也适用于处理初值问题；不仅适用于处理一维问题，也能用于处理高维问题. 但却只适用处理描述非稳定过程(即与时间变量有关)的定解问题；而不适用于描述稳定过程(即与时间变量无关)的定解问题. 因为任何处理问题的方法，都是在特定的条件下产生的. 所以，我们在运用各种方法时，必须注意方法的适用范围及其条件.

§2.6　杜哈美(Duhamal)原理的另一种形式

立足于应用的广泛性，我们再扼要地介绍一下与杜哈美原理本质上一致，而形式上不同的所谓第二杜哈美原理.

定理 2.3　设函数 $\varphi(t)$于 $t\geqslant 0$ 上连续可微，若 $v=v(x,t)$是定解问题

$$
(A)\begin{cases}
\alpha \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \beta \dfrac{\partial v}{\partial t} = \gamma \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (0 < x < l,\ t > 0) & (2\text{-}46)\\
\left(\sigma v + \theta \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} = 1,\ \left(\lambda v + \mu \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{x=l} = 0 \quad (t \geqslant 0) & (2\text{-}47)\\
v|_{t=0} = 0,\quad \alpha\dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) & (2\text{-}48)
\end{cases}
$$

的两次连续可微*的解. 其中α、β、γ、σ、θ、λ、μ都为常数，且$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq0$，$\theta^2+\sigma^2\neq0$，$\lambda^2+\mu^2\neq0$，则

$$
u(x,t) = \int_0^t \frac{\partial v(x,t-\tau)}{\partial t}\varphi(\tau)d\tau \tag{2-49}
$$

便是定解问题

$$
(B)\begin{cases}
\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l,\ t > 0) & (2\text{-}50)\\
\left(\sigma u + \theta \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} = \varphi(t),\ \left(\lambda u + \mu \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=l} = 0 (t \geqslant 0) & (2\text{-}51)\\
u|_{t=0} = 0,\quad \alpha\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) & (2\text{-}52)
\end{cases}
$$

的解.

证明　按对φ及v所作的假设，通过简单的变数代换，并分部积分，再注意条件(2-48)式，可见(2-49)式为

$$
u(x,t) = -\int_0^t \frac{\partial v(x,t-\tau)}{\partial \tau}\varphi(\tau)d\tau = -\left[v(x,t-\tau)\varphi(\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=t}
$$

$$
+\int_0^t \varphi'(\tau)v(x,t-\tau)d\tau = v(x,t)\varphi(0) + \int_0^t \varphi'(\tau)v(x,t-\tau)d\tau \tag{2-53}
$$

据此以及关于$v(x,t)$于$0\leqslant x\leqslant l$，$t\geqslant0$上两次连续可微的假设，按含参变量积分及具有变动上限的积分的微商定理，并注意到条件(2-48)式，有

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\varphi(0) + \int_0^t \varphi'(\tau)\frac{\partial^2 v(x,t-\tau)}{\partial x^2}d\tau
$$

---

* 即$v=v(x,t)$对x,t的所有二阶偏导数都连续.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\varphi(0)+\varphi'(t)v(x,0)+\int_0^t\varphi'(\tau)\frac{\partial v(x,t-\tau)}{\partial t}d\tau$$

$$=\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\varphi(0)+\int_0^t\varphi'(\tau)\frac{\partial v(x,t-\tau)}{\partial t}d\tau \tag{2-54}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}\varphi(0)+\varphi'(t)\frac{\partial v(x,0)}{\partial t}+\int_0^t\varphi'(\tau)\frac{\partial^2 v(x,t-\tau)}{\partial t^2}d\tau$$

从而，由(2-48)和(2-46)式及简单的变数代换有

$$\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial u}{\partial t}-\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi'(t)\left[\alpha\frac{\partial v(x,0)}{\partial t}\right]+\left[\alpha\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right.$$

$$\left.-\gamma\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}\right]\varphi(0)+\int_0^t\varphi'(t)\left[\alpha\frac{\partial^2 v(x,t-\tau)}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial v(x,t-\tau)}{\partial t}\right.$$

$$\left.-\gamma\frac{\partial^2 v(x,t-\tau)}{\partial x^2}\right]d\tau=0 \tag{2-55}$$

这表明(2-49)式满足定解问题(B)的方程(2-50)式. 而由(2-53)及(2-47)式可知

$$\left(\sigma u+\theta\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}=\left[\sigma v(x,t)+\theta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]\Big|_{x=0}\varphi(0)$$

$$+\int_0^t\left[\sigma v(x,t-\tau)+\theta\frac{\partial v(x,t-\tau)}{\partial x}\right]\Big|_{x=0}\varphi(\tau)d(\tau)$$

$$=\varphi(0)+\int_0^t\varphi(\tau)d\tau=\varphi(t) \tag{2-56}$$

$$\left(\lambda u+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=l}=\left[\sigma v(x,t)+\theta\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right]\Big|_{x=l}\varphi(0)$$

$$+\int_0^t\left[\sigma v(x,t-\tau)+\theta\frac{\partial v(x,t-\tau)}{\partial x}\right]\Big|_{x=l}\varphi(\tau)d\tau=0 \tag{2-57}$$

根据(2-53)、(2-54)式可知(2-49)式满足条件(2-52)式，于是由(2-55)至(2-57)诸式可见，(2-49)式所确定的$u=u(x,t)$是定解问题(B)的解.

关于定理 2.3 给出的第二杜哈美原理，我们作如下几点说明：

1° 由于定理 2.3 讨论的定解问题中，所含方程为较一般的方程，而边界条件又是第三边界条件，因此，就自然囊括了典型的一维热传导方程和一维波动方程以及第一边界条件和第二边界条件均为其特殊情形. 不过，若对于所论方程为热传导方程时，定理 2.3 中

对 $v=v(x,t)$ 所作的假设，要改为对 x 的二阶偏导数连续，而对 t 的一阶偏导数连续.

2° 由(2-49)式不难看出，第二杜哈美原理的实质也在于迭加原理；而其主要作用在于把求解含较一般边界条件的定解问题，转化为求解含特殊边界条件的定解问题. 鉴于此，以及初始条件在迭加过程中的作用，不难得知，第二杜哈美原理比较适用于处理具有复杂边界条件的混合问题(包括空间变量为半无界的情形)；而不适于处理初值问题(因其不具有明显的边界条件)以及边值问题(因其不具初始条件).

3° 含高维的热传导方程及波动方程的混合问题，第二杜哈美原理照样适用. 不过象一维的情形一样，对高维的情形也要求方程是齐次的，初始条件也是齐次的.

下面仅举一例，用来说明如何应用第二杜哈美原理.

例 2.8 试求定解问题

$$(A)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<1,\ t>0)\\ u|_{x=0}=\sin t e^{-t^2},\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=1}=0 & (t\geqslant 0)\\ u|_{t=0}=0 & (0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

的解.

解 按定理 2.3，为了求解(A)，只须先求出

$$(B)\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (0<x<1,t>0)\\ v|_{x=0}=1,\quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{x=1}=0 & (t\geqslant 0)\\ v|_{t=0}=0 & (0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

的解 $v=v(x,t)$，从而(A)的解便是

$$u=\int_0^t\frac{\partial v(x,t-\tau)}{\partial t}\sin\tau e^{-\tau^2}d\tau \tag{2-58}$$

为了求解(B)，先将其所含的非齐次边界条件化为齐次边界条件，为此设

$$H(x) = 1$$

则 $w=v-H$ 满足

$$(C)\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} & (0 < x < 1, t > 0) \\ w|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=1} = 0 & (t \geqslant 0) \\ w|_{t=0} = 1 & (0 \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$$

按分离变量法解(C)易得

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} x e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right]^2 t}$$

从而，定解问题(B)的解为

$$v(x,t) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} x e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right]^2 t}$$

于是，按(2-58)式可得定解问题(A)的解为

$$u(x,t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+1)\pi a^2 \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} x \cdot \int_0^t \sin \tau e^{-\left\{\tau^2 + \left[\frac{2n+\pi a}{4}\right]^2 (t-\tau)\right\}} d\tau \right]$$

第三章　积分变换

δ-函数的许多应用，总是与积分变换法形影不离的. 为了后面各章在叙述上，不打乱我们的思路，这里特辟一章，对积分变换的理论作一般性的介绍，同时，也将突出阐述 δ-函数在该理论中的应用. 由于本书的重点是讲 δ-函数，因而，关于积分变换的内容，只能从简，特别是与 δ-函数关系不大的一些定理、性质和公式，要证明的话，也只能略述.

起源于 19 世纪的运算微积（包括常微分方程的算子解法）用来求解偏微分方程是特别便利的. 后来，它的发展已经为积分变换所替代. 所谓积分变换就是由式子

$$\varphi(x) = \int_a^b k(x,t)f(t)dt \tag{3-1}$$

定义的变换叫做积分变换. 每给定一个区间(a, b)（a, b 可以分别是 $-\infty$, $+\infty$）与称之为核函数的 $k(x,t)$（$a \leqslant t \leqslant b$, x 是实变数或复变数）都确定一个称之为初始函数或象原函数的 $f(t)$到称之为变换函数或称象函数 $\varphi(x)$的积分变换.

当核函数 $k(p,t)=e^{-pt}$, $a=0, b=+\infty$时，即

$$\varphi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$$

称为拉普拉斯(Laplace)变换，简称为拉氏变换，其中 p 是复数.

当核函数 $k(\lambda,t)=e^{-i\lambda t}$, $a=-\infty$, $b=+\infty$时，即

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}f(t)dt$$

称为傅立叶(Fourier)变换. 简称为傅氏变换.

§3.1 傅氏变换

学过高等数学的读者都知道，傅氏级数能将一个周期函数表示成无穷多个频率为基频整数倍的谐振动之和，而傅氏变换则能将一个非周期函数表示成整个连续的频率区间上的积分和. 一般的教科书都是先建立起周期函数的傅氏级数理论，然后，再加大周期，经过极限手续，过渡到非周期函数的傅氏变换. 但是，由于我们已经有了 δ-函数这一重要的数学工具，所以，就可以把上述过程倒过来进行，即先建立傅氏积分理论，然后，适当运用 δ-函数，把函数的级数表示与积分表示统一起来，这样，傅氏级数就可以看成是傅氏变换的特例. 这样做不仅在推理上更为简捷，而且，也更容易看清两种理论的本质，以及它们之间的关系. 特别是这不仅在应用上会带来很大方便，同时，也能看到研究 δ-函数理论的重要意义.

3.1.1 傅氏变换的定义

定义 3.1 设函数 $f(x)$于$(-\infty,\ +\infty)$上有定义，则称

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \tag{3-2}$$

为 $f(x)$的傅氏变换；称

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \tag{3-3}$$

为 $g(\lambda)$的傅氏逆变换. 并且，$g(\lambda)$称为 $f(x)$的象函数（或称变换函数）；$f(x)$称为 $g(\lambda)$的象原函数（或称初始函数）. 其中 λ 为参变量. 通常将(3-2)式记为

$$g(\lambda)=F[f(x)]$$

将(3-3)式记为

$$f(x)=F^{-1}[g(\lambda)]$$

这个概念告诉我们，两个函数可以通过积分的形式互相表达出来. 在满足一定条件下，一个函数确定之后，另一个函数也就唯一地确定了. 这种一一对应关系，我们称为傅氏变换对，记为

$$f(x) \leftrightarrow g(\lambda) \tag{3-4}$$

并非任何情况下，函数 $f(x)$ 都能表示成(3-4)式的. 为此，我们给出傅氏积分基本原理.

定理 3.1(傅氏积分定理) 若 $f(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且于任一有限区间上满足狄利克来(Dirichlet)条件*，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\right]e^{i\lambda x}d\lambda^{**} \tag{3-5}$$

成立.

证明 从(3-2)、(3-3)式可知，(3-5)式即是

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

因此，只须证明该式成立，则定理 3.1 便得证.

事实上，把(3-2)式代入(3-5)式的右端，得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi$$

交换积分次序，注意运用 δ-函数的性质，则得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda(\xi-x)}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cdot 2\pi\delta(\xi-x)d\xi=f(x)$$

其中 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda(\xi-x)}d\lambda=2\pi\delta(\xi-x)$. 这就证明了(3-5)式的正确性. 通常称(3-5)式为傅氏积分公式. 可见傅氏逆变换，不过就是将傅氏积

---

* 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且满足：

1° $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续或只有有限个第一类间断点；

2° $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有有限多个极值点；

3° $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 都存在.

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足狄氏条件.

** 式中的广义积分都是在柯西主值意义下的，所谓主值意义是指：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}f(x)dx$$

分公式换一种写法而已．于是，(3-5)式可记为

$$f(x) = F^{-1}[g(\lambda)] = F^{-1}[F[f(x)]] \qquad (3\text{-}5)'$$

公式(3-2)、(3-3)有着明显的物理意义，$f(x)$常被称为时间变量的函数(如波或信号)，$g(\lambda)$称为频率变量λ的函数．而傅氏变换可以看作是时间函数在频率域上的表示，即(3-3)式说明在整个时间轴上的波为$f(x)$，是由频率为λ的谐波$g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$通过积分迭加得到的，由于不同的频率，微分$d\lambda$是一样的，所以，只有$g(\lambda)$才真正反映出不同频率谐波的振幅和初相位的变化，因而称$g(\lambda)$为$f(x)$的连续谱(简称频谱)，并且，又因$g(\lambda)$是复函数，因此，$g(\lambda)$可以表示为

$$g(\lambda) = H(\lambda)e^{i\Phi(\lambda)}$$

其为$H(\lambda)=|g(\lambda)|$，$\Phi(\lambda)=\mathrm{Arg}g(\lambda)$．则称$H(\lambda)$为$f(x)$的振幅谱，称$\Phi(\lambda)$为$f(x)$的相位谱．正因为如此，许多工程技术上，如地震勘探、无线电技术等工程中，接收到的信号，不仅有有效信号，而且参杂着许多(甚至很强的)干扰信号，仅仅从接收到的信号是分析不出有效信号的性质及其变化规律的．所以，必须将接收到的信号通过傅氏变换，变成频率域里的函数，再通过滤波的方法，达到抑制干扰信号、增强有效信号的目的．并且，通过本书的后几章的讨论，我们说傅氏变换是许多科学技术领域里不可缺少的数学工具，是毫不夸张的．

3.1.2 傅氏变换的性质

对傅氏变换的一些性质的分析是彻底理解它的基础，形象地解释这些基本性质，以及了解它们的数学关系和重要应用，同样是不可缺少的步骤．

为了叙述上的方便，在这些性质中，凡需要求傅氏变换的函数，对其所要求的条件都假定是满足的．

性质 3.1 线性性．设$g_1(\lambda)=F[f_1(x)]$，$g_2(\lambda)=F[f_2(x)]$，α，β是常数，则

$$F[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha F[f_1(x)] + \beta F[f_2(x)] \qquad (3\text{-}6)$$

该性质的实质是指出傅氏变换是线性变换．证明该性质只需根

据定义就可推出来. 同样，傅氏逆变换亦具有类似的性质，即：

$$F^{-1}[\alpha g_1(\lambda)+\beta g_2(\lambda)]=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x) \tag{3-7}$$

性质 3.2 位移性质. 设 $g(\lambda)=F[f(x)]$，则有

$$F[f(x\pm x_0)]=e^{\pm i\lambda x_0}F[f(x)] \tag{3-8}$$

$$F^{-1}[g(\lambda\mp\lambda_0)]=e^{\pm i\lambda_0 x}f(x) \tag{3-9}$$

该性质说明自变量提前或延迟 x_0，相当于它的傅氏变换乘以因子 $e^{\pm i\lambda x_0}$.

证明 只证(3-8)式，(3-9)式的证明类似. 因为，由傅氏变换的定义可知

$$F[f(x\pm x_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x\pm x_0)e^{-i\lambda x}dx$$

令 $t=x\pm x_0$，则 $dt=dx$，从而

$$F[f(x\pm x_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda(t\pm x_0)}dt=e^{\pm i\lambda x_0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

$$=e^{\pm i\lambda x_0}F[f(x)]$$

同理可证(3-9)式. 该式说明频率函数 $g(\lambda)$沿 λ 轴位移 λ_0 时，相当于原来的函数乘以因子 $e^{\pm i\lambda_0 x}$.

这个性质在应用上的重要性是不言而喻的. 例如，由傅氏变换的定义，可知 δ-函数的谱为

$$F[\delta(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{-i\lambda x}dx=e^0=1 \tag{3-10}$$

则 $\delta(x-x_0)$的谱就是 $e^{-i\lambda x_0}$. 如果由(3-2)式出发也可以计算出来这一结果. 因为根据 δ-函数的运算性质有

$$F[\delta(x-x_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)e^{-i\lambda x}dx=e^{-i\lambda x_0} \tag{3-11}$$

同时，由傅氏逆变换及(3-10)和(3-11)式，若知$g(\lambda)=2\pi\delta(\lambda)$和 $g(\lambda)=2\pi\delta(\lambda-\lambda_0)$，则有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda=1$$

和

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\lambda-\lambda_0)e^{i\lambda x}d\lambda=e^{i\lambda_0 x}$$

立即可知

$$F[1] = 2\pi\delta(\lambda) \tag{3-12}$$

$$F[e^{-i\lambda_0 x}] = 2\pi\delta(\lambda - \lambda_0) \tag{3-13}$$

有了 δ-函数，求 $f(x)=1$ 及 $f(x)=e^{-i\lambda_0 x}$的谱就非常简单；否则，将要用积分再取极限，经冗长的推导和繁锁的计算，才能得到(3-12)和(3-13)两式．这一点充分说明 δ-函数在傅氏变换中的重要作用．

根据性质 3.1 和(3-12)、(3-13)二式，又可得

$$F[A\cos\lambda_0 x] = F[A \cdot \frac{e^{i\lambda_0 x} + e^{-i\lambda_0 x}}{2}]$$

$$= A\left\{F[\frac{1}{2}e^{i\lambda_0 x}] + F[\frac{1}{2}e^{-i\lambda_0 x}]\right\}$$

$$= A\left\{\frac{1}{2} \cdot 2\pi\delta(\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{2} \cdot 2\pi\delta(\lambda + \lambda_0)\right\}$$

$$= \pi A[\delta(\lambda - \lambda_0) + \delta(\lambda + \lambda_0)] \tag{3-14}$$

同理：

$$F[A\sin\lambda_0 x] = \pi i A[\delta(\lambda + \lambda_0) - \delta(\lambda - \lambda_0)] \tag{3-15}$$

其中 A 为常数。

性质 3.3 微分性质．即设 $f(x)$，$f'(x)$均于$(-\infty, +\infty)$上绝对可积，则

$$F[f'(x)] = (i\lambda)F[f(x)] \tag{3-16}$$

证明 首先证明

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \tag{3-17}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \tag{3-18}$$

因为，由

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(\xi)d\xi$$

而 $f'(x)$ 于$(-\infty, +\infty)$上绝对可积，所以$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(\xi)d\xi$ 存在，从而 $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(\xi)d\xi$ 与$\int_{\infty}^{0} f'(\xi)d\xi$ 均存在．故下列极限存在

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(\xi)d\xi \tag{3-19}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = f(0) - \int_{-\infty}^{0} f'(\xi)d\xi \tag{3-20}$$

假若(3-17)式不成立，则由(3-19)式可知

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \neq 0$$

不妨设常数 $a>0$，从而，存在常数 $A>0$ 使得当 $x\geqslant A$ 时，

$$f(x) > \frac{a}{2}$$

由此可见 $\int_A^{+\infty} f(x)dx = \infty$，故 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散．这与已知条件矛盾，所以(3-17)式成立，同理可证(3-18)式也成立．

再由(3-17)式、(3-18)式以及分部积分公式可证(3-16)式也是成立的，即

$$F[f'(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi = e^{-i\lambda\xi}f(\xi)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)de^{-i\lambda\xi}$$

$$= (i\lambda)\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi = (i\lambda)F[f(x)]$$

性质 3.3 是微商的变换，它说明一个函数微商的傅氏变换，等于这个函数的傅氏变换乘以因子 $(i\lambda)$.

反复运用性质 3.3，不难得出以下的推论：

推论 3.1 $F[f''(x)] = (i\lambda)^2F[f(x)] = -\lambda^2F[f(x)]$，一般地有

$$F[f^{(n)}(x)] = (i\lambda)^nF[f(x)] \tag{3-21}$$

利用(3-21)容易求出 $\delta^{(n)}(x)$ 的傅氏变换，即

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{(n)}\delta(x)}{dx^n}e^{-i\lambda x}dx = (i\lambda)^nF[\delta(x)] = (i\lambda)^n \tag{3-22}$$

其中，$F[\delta(x)]=1$.

性质 3.4 积分性质．即

$$F\left[\int_{-\infty}^{x} f(x)dx\right] = \frac{1}{i\lambda}F[f(x)] \tag{3-23}$$

证明 因为

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = f(x)$$

所以，两端取傅氏变换得

$$F\left[\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(x)dx\right]=F[f(x)]$$

由微分性质(3-16)式，得

$$F\left[\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(x)dx\right]=i\lambda F\left[\int_{-\infty}^{x} f(x)dx\right]$$

所以

$$F\left[\int_{-\infty}^{x} f(x)dx\right]=\frac{1}{i\lambda}F[f(x)]$$

性质 3.5 设 $f(x)$ 于 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积，则

$$\frac{d}{d\lambda}F[f(x)] = F[-ixf(x)] \tag{3-24}$$

证明 在所设的条件下，容易验证

$$\frac{d}{d\lambda}F[f(x)] =\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi =\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\lambda}[f(\xi)e^{-i\lambda\xi}]d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(-i\xi)f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi = F[-ixf(x)]$$

这个性质也形象地称为变换的微商．它说明一个函数的傅氏变换的微商，等于这个函数乘以因子 $(-ix)$ 后再取傅氏变换．

性质 3.3 和性质 3.5 又深刻地说明了傅氏变换建立了微分运算与乘法运算之间的对偶关系，即微商的变换等于 $i\lambda$ 与函数变换的乘积；变换的微商则等于 $-ix$ 与函数乘积的变换．从而把微分运算转化为乘法运算．正是由于这一重要的结论，在解微分方程过程中起着关键性的作用，它可以把偏微分方程转化为常微分方程，把常微分方程转化为代数方程，降低解微分方程的难度，达到便于求微分方程的通解的目的．

性质 3.6 乘积定理．设 $F[f_1(x)]=g_1(\lambda)$，$F[f_2(x)]=g_2(\lambda)$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{g_1(\lambda)}g_2(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)}d\lambda \tag{3-25}$$

其中 $\overline{g_1(\lambda)}$，$\overline{g_2(\lambda)}$ 分别为 $g_1(\lambda)$ 和 $g_2(\lambda)$ 的共轭函数．

证明 由傅氏逆变换的公式(3-3)并交换积分次序，易证

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)e^{i\lambda x}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_1(x)e^{-i\lambda x}}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g_1(\lambda)}g_2(\lambda)d\lambda$$

其中 $f_1(x)$是实函数，故$\overline{f(x)}=f(x)$，$e^{i\lambda x}=\overline{e^{-i\lambda x}}$.

同理可证

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)}d\lambda$$

性质 3.7 能量积分(或称为巴塞瓦等式). 若 $g(\lambda)=F[f(x)]$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2d\lambda \tag{3-26}$$

证明 于(3-25)式中，令 $f_1(x)=f_2(x)=f(x)$，立即可得(3-26)式. 其中$|g(\lambda)|^2$ 称为能量密度函数(或称为能量谱密度). 它可以确定函数 $f(x)$的能量分布规律.

性质 3.8 对称性. 若 $f(x)$是偶函数，则 $F[f(x)]=g(\lambda)$也是偶函数；$f(x)$是奇函数，则 $F[f(x)]=g(\lambda)$也是奇函数.

性质 3.9 共轭性质. 若函数 $f(x)$的频谱为 $g(\lambda)$，则$\overline{f(x)}$的频谱为$\overline{g(-\lambda)}$. 特别是，当 $f(x)$为实函数时，有

$$\overline{g(\lambda)} = g(-\lambda) \tag{3-27}$$

证明 因为$\overline{f(x)}$的频谱为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}e^{-i\lambda x}dx = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx} = \overline{g(-\lambda)}$$

所以，(3-27)式成立. 特别地，当 $f(x)$是实函数时，$f(x)=\overline{f(x)}$，因此，$g(\lambda)=\overline{g(-\lambda)}$.

这个性质说明，只要知道 $\lambda\geqslant 0$ 时的频谱值就可以了，当 $\lambda<0$ 时，其频谱为 $g(\lambda)=\overline{g(-\lambda)}$. 这个性质在工程技术上是很有用的.

因为，工程技术上所出现的信号 $f(x)$，一般的都是实值信号.

性质 3.10 频移性质. 设已知函数 $f(x)$ 的频谱为 $g(\lambda)$，则信号 $f(x)e^{i\lambda_0 x}$ 的频谱为 $g(\lambda-\lambda_0)$，$f(x)e^{-i\lambda_0 x}$ 的频谱为 $g(\lambda+\lambda_0)$.

有了性质 3.10，不难推出 $f(x)\cos\lambda_0 x$，及 $f(x)\sin\lambda_0 x$ 的频谱，因为

$$f(x)\cos\lambda_0 x = f(x)\frac{e^{i\lambda_0 x}+e^{-i\lambda_0 x}}{2} = \frac{1}{2}[f(x)e^{i\lambda_0 x}+f(x)e^{-i\lambda_0 x}]$$

所以

$$g(\lambda) = F[f(x)\cos\lambda_0 x] = \frac{1}{2}[g(\lambda-\lambda_0)+g(\lambda+\lambda_0)] \quad (3\text{-}28)$$

同理

$$g(\lambda) = F[f(x)\sin\lambda_0] = \frac{1}{2i}[g(\lambda-\lambda_0)-g(\lambda+\lambda_0)] \quad (3\text{-}29)$$

性质 3.11 设 $F[f(x)]=g(\lambda)$，则

$$F[f(kx)] = \frac{1}{|k|}g\left(\frac{\lambda}{k}\right) \quad (3\text{-}30)$$

$$F\left[\frac{1}{|k|}f\left(\frac{x}{k}\right)\right] = g(k\lambda) \quad (3\text{-}31)$$

证明 只证(3-30)式. 因为

$$F[f(kx)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(kx)e^{-i\lambda x}dx = \frac{1}{|k|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(kx)e^{-i\frac{\lambda}{k}(kx)}d(kx)$$

$$= \frac{1}{|k|}g\left(\frac{\lambda}{k}\right)$$

其中 k 为不等于零的任意常数.

类似地，(3-31)式可得证.

定义 3.2 若已知函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$$

称为函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的褶积. 记为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi = f_1(x) * f_2(x) \quad (3\text{-}32)$$

并且，由定义 3.2 直接可得出褶积符合交换律、结合律及对加法的

分配律，即

$$f_1(x) * f_2(x) = f_2(x) * f_1(x)$$

$$f_1(x) * [f_2(x) * f_3(x)] = [f_1(x) * f_2(x)] * f_3(x)$$

$$f_1(x) * [f_2(x) + f_3(x)] = f_1(x) * f_2(x) + f_1(x) * f_3(x)$$

性质 3.12　褶积定理. 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$都于$(-\infty, +\infty)$上绝对可积，则

$$F[f_1(x) * f_2(x)] = F[f_1(x)] \cdot F[f_2(x)] = g_1(\lambda) \cdot g_2(\lambda) \tag{3-33}$$

证明　根据傅氏变换及褶积的定义，有

$$\begin{aligned} F[f_1(x) * f_2(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x) * f_2(x)] e^{-i\lambda x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi\right] e^{-i\lambda x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-\xi) e^{-i\lambda x} dx \end{aligned}$$

令 $t = x - \xi$，则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-\xi) e^{-i\lambda x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= g_1(\lambda) \cdot g_2(\lambda) \end{aligned}$$

其中，当引入新的积分变量 t 时，则把 ξ 看成参数了，即 $x = t + \xi$，$dx = dt$.

同理可证

$$F[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \frac{1}{2\pi}[g_1(\lambda) * g_2(\lambda)] \tag{3-34}$$

这个性质在许多应用上是极为重要的. 特别是通过(3-33)式，把时间域上的褶积转换成频率域上的乘积，往往使得杂复的问题变得简单了.

在解数学物理方程时，(3-33)式常常变形为

$$F^{-1}\{F[f_1(x)] \cdot F[f_2(x)]\} = f_1(x) * f_2(x)$$

后面在阐述傅氏变换法的应用时，将充分运用这一形式.

下面通过具体例题，进一步说明傅氏变换的方法和上述 12 个

性质的应用.

例 3.1 求 $\delta(kx)$的傅氏变换.

解 根据公式(3-30)立即可得

$$F[\delta(kx)] = \frac{1}{|k|}F[\delta(x)] = \frac{1}{|k|}$$

例 3.2 求函数 $f(t)=\frac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta(t+\frac{a}{2})+\delta(t-\frac{a}{2})]$的傅氏变换.

解 因为

$$f(t) = \frac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)] + \frac{1}{2}[\delta(t+\frac{a}{2})+\delta(t-\frac{a}{2})]$$

所以

$$F[f(t)] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t+a)+\delta(t-a)]e^{-i\lambda t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t+\frac{a}{2})+\delta(t-\frac{a}{2})]e^{-i\lambda t}dt$$

运用 δ-函数的运算性质可得

$$F[f(t)] = \frac{1}{2}(e^{i\lambda a}+e^{-i\lambda a}) + \frac{1}{2}(e^{i\lambda\frac{a}{2}}+e^{-i\lambda\frac{a}{2}}) = \cos\lambda a + \cos\lambda\frac{a}{2}$$

例 3.3 证明函数 $f(x)=\text{sgn}x$ 的傅氏变换为$\frac{1}{i\lambda}$.

证明 因为$\frac{2}{i\lambda}$的傅氏逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{i\lambda}e^{i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{i\pi\lambda}d\lambda + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\sin\lambda x}{i\lambda}d\lambda$$

该式第一个积分，因为对 λ 而言被积函数是奇函数，故积分值等于零，第二个积分为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda x}{\lambda}d\lambda = \begin{cases} 1 & \text{当 } x>0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x=0 \text{ 时} \\ -1 & \text{当 } x<0 \text{ 时} \end{cases}$$

所以，得到

$$F[\text{sgn}x] = \frac{1}{i\lambda} \tag{3-35}$$

例 3.4 求单位阶跃函数

$$u(x)=\begin{cases}1 & \text{当} \geqslant 0\text{时}\\ 0 & \text{当}\, x<0\text{时}\end{cases}$$

的傅氏变换.

解 首先将 $u(x)$ 变形为

$$u(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & \text{当}\, x\geqslant 0\text{时}\\ 0 & \text{当}\, x<0\text{时}\end{cases}$$

由性质 3.1 可知，求 $u(x)$ 的谱，等于求 $\frac{1}{2}$ 的谱加上 $\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x$ 的谱. 由 (3-12)式知

$$F\left[\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\delta(\lambda)=\pi\delta(\lambda)$$

由(3-35)式知

$$F\left[\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{i\lambda}=\frac{1}{i\lambda}$$

所以，有

$$F[u(x)]=F\left[\frac{1}{2}\right]+F\left[\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x\right]=\pi\delta(\lambda)+\frac{1}{i\lambda} \qquad (3\text{-}36)$$

例 3.5 求 $u(x)e^{i\lambda_0 x}$ 的傅氏变换.

解 由性质 3.10 可知

$$F[u(x)e^{i\lambda_0 x}]=\pi\delta(\lambda-\lambda_0)+\frac{1}{i(\lambda-\lambda_0)}$$

例 3.6 求积分

$$h(x)=\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi \qquad (3\text{-}37)$$

的傅氏变换 $g(\lambda)$.

解 若(3-37)中 $f(x)$ 的谱设为 $F(\lambda)=R(\lambda)+iI(\lambda)$，又根据定义 3.2，可知

$$h(x)=f(x)*u(x)$$

再利用性质 3.12，得

$$g(\lambda)=F[f(x)*u(x)]=F[f(x)]\cdot F[u(x)]$$

由(3-36)式以及 δ-函数的性质，立即得到

$$g(\lambda)=F[f(x)]\cdot F[u(x)]=F(\lambda)\cdot[\pi\delta(\lambda)+\frac{1}{i\lambda}]$$

$$=\pi R(0)\delta(\lambda)+\frac{I(\lambda)}{\lambda}-i\frac{R(\lambda)}{\lambda}$$

其中用到等式(即 δ-函数的性质 1.7)

$$F(\lambda)\cdot\delta(\lambda)=F(0)\delta(\lambda)=R(0)\delta(\lambda)$$

例 3.7 求函数

$$f(x)=\frac{1}{l}\int_{x-\frac{l}{2}}^{x+\frac{l}{2}}u(\xi)d\xi \tag{3-38}$$

的傅氏变换.

解 设 $F[f(x)]=g(\lambda)=R(\lambda)+iI(\lambda)$. 由性质 3.12 褶积定理可知

$$f(x)=u(x)*\frac{1}{l}\Pi_{\frac{l}{2}}(x)$$

其中:

$$\Pi_{\frac{l}{2}}(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } |x|\leqslant\frac{l}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

又知 $u(x)$的谱由(3-36)式给出，而所谓门函数有

$$F[\Pi_{\frac{l}{2}}(x)]=\frac{2\sin(\lambda\frac{l}{2})}{\lambda}$$

于是

$$F[f(x)]=g(\lambda)=[\pi\delta(\lambda)+\frac{1}{i\lambda}]\cdot\frac{2\sin(\lambda\frac{l}{2})}{l\lambda}$$

$$=\pi\delta(\lambda)+\frac{2\sin(\lambda\frac{l}{2})}{il\lambda^2}$$

上式用到了 δ-函数的性质 1.7，即

$$\frac{2\pi\delta(\lambda)\sin(\lambda\frac{l}{2})}{l\lambda}=\pi\delta(\lambda)$$

所以，谱 $g(\lambda)$的实部和虚部分别为

$$R(\lambda)=\pi\delta(\lambda),\ I(\lambda)=-\frac{2\sin(\lambda\frac{l}{2})}{l\lambda^2}$$

采用与例 3.6、例 3.7 同样的方法，由(3-36)式和 δ-函数的性质 1.7 以及褶积定理，容易推出如下两个函数的傅氏变换

$$F[u(x)\cos\lambda_0 x]=\frac{\pi}{2}[\delta(\lambda-\lambda_0)+\delta(\lambda+\lambda_0)]+\frac{i\lambda}{\lambda_0^2-\lambda^2} \tag{3-39}$$

$$F[u(x)\sin\lambda_0 x]=\frac{\pi}{2i}[\delta(\lambda-\lambda_0)-\delta(\lambda+\lambda_0)]+\frac{\lambda_0}{\lambda_0^2-\lambda^2} \tag{3-40}$$

如果读者能独立地运用傅氏变换中位移、乘积、褶积等重要性质，从更简单的变换对，验证如下所给出的变换，从中掌握傅氏变换的方法，以及 δ-函数对傅氏变换的重要作用，无论是加深对傅氏变换理论的理解，还是用于解决实际问题，都是一种非常有益的训练.

(1) $$F[A\cos^2\lambda_0 x]=\pi A\left[\frac{1}{2}\delta(\lambda+2\lambda_0)+\delta(\lambda)+\frac{1}{2}\delta(\lambda-2\lambda_0)\right] \tag{3-41}$$

(2) $$F[A\sin^2\lambda_0 x]=\pi A\left[-\frac{1}{2}\delta(\lambda+2\lambda_0)+\delta(\lambda)-\frac{1}{2}\delta(\lambda-2\lambda_0)\right] \tag{3-42}$$

(3) $$F[e^{i\lambda_0 x}(A+a\cos\lambda_1 x)]=2\pi[A\delta(\lambda-\lambda_0)+\frac{a}{2}\delta(\lambda-\lambda_0+\lambda_1)+\frac{a}{2}\delta(\lambda-\lambda_0-\lambda_1)] \tag{3-43}$$

(4) $$F[e^{i\lambda_0 x}(A+a\sin\lambda_1 x)]=2\pi[A\delta(\lambda-\lambda_0)+\frac{ia}{2}\delta(\lambda-\lambda_0+\lambda_1)-\frac{ia}{2}\delta(\lambda-\lambda_0-\lambda_1)] \tag{3-44}$$

(5) $$F[A(1-e^{-ax})]=\pi A\delta(\lambda)-A\left(\frac{a}{a^2+\lambda^2}+i\frac{a^2}{\lambda(a^2+\lambda^2)}\right)\quad (x>0) \tag{3-45}$$

其中(3-41)至(3-45)诸式中，A 和 a 都是常数.

这里应该声明一点，上述诸例中均有 δ-函数，显然，不含有 δ-函数的傅氏变换问题，只须用普通积分法去算是不该有困难的. 正因如此，又加上本书总的目的是讨论 δ-函数，因此，没有这样的例子是自然的.

下面我们来说明，只要适当应用 δ-函数，则傅氏级数就可以看成傅氏积分的特例.

事实上，设 $f(x)$是以 l 为周期的周期函数，即 $f(x+l)=f(x)$. 则由此及傅氏逆变换公式(3-3)就可以推出来. 因为 $e^{i\lambda(x+l)}=e^{i\lambda x}$，即 $e^{i\lambda l}=1$，故 $i\lambda l=2k\pi i$. 这里频率 λ 只能取离散值，即

$$\lambda=\lambda_k=\frac{2k\pi}{l}\qquad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

因此，周期函数的谱也不再是连续的，而是离散的. 也就是离散谱用 δ-函数形式表示为

$$g(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(\lambda-\lambda_k)\tag{3-46}$$

将(3-46)代入(3-3)式得

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(\lambda-\lambda_k)e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\lambda-\lambda_k)e^{i\lambda x}d\lambda$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k'e^{i\lambda_k x}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k'e^{i\frac{2k\pi}{l}x}$$

其中$a_k'=\frac{1}{2\pi}a_k$，a_k'是复数形式傅氏级数的系数，它可以通过给定的函数 $f(x)$确定，其方法和公式都与高等数学中确定傅氏级数的系数一样，这里不再重复. 关于(3-46)式将在第五章里详细阐述.

3.1.3 多元函数的傅氏变换

一元函数的傅氏变换理论，自然可以推广到多元函数的理论中去. 由于在实际应用中，经常用到的是二维、三维和四维的傅氏变换，因此，将这三种情况分别详细阐述是很有必要的.

(1)多元函数傅氏变换的概念. 我们首先从二元函数的傅氏变换开始研究.

设函数 $f(x,y)$于$-\infty<x,y<+\infty$区域上绝对可积，先将 $f(x,y)$

看作 x 的函数，就取傅氏变换而言，把 y 看成常量，那么，由一维傅氏变换的理论，可知

$$g(\lambda_1,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)e^{-i\lambda_1 x}dx \tag{3-47}$$

再将 $g(\lambda_1,y)$ 看成是 y 的函数，然后，将 $g(\lambda_1,y)$ 对 y 取傅氏变换，则有

$$g(\lambda_1,\lambda_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda_1,y)e^{-i\lambda_2 y}dy \tag{3-48}$$

把(3-47)式代入(3-48)式，则可见函数 $g(\lambda_1,\lambda_2)$ 与 $f(x,y)$ 之间有如下关系式

$$g(\lambda_1,\lambda_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)e^{-i(\lambda_1 x+\lambda_2 y)}dxdy \tag{3-49}$$

于是，我们称 $g(\lambda_1,\lambda_2)$ 是函数 $f(x,y)$ 的二维傅氏变换，以(3-49)式表示之. 其傅氏逆变换，也可以类似地由定理 3.1 推导出来，即，由于

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda_1,y)e^{i\lambda_1 x}d\lambda_1 \tag{3-50}$$

仿此，再对(3-48)式取逆变换可得

$$g(\lambda_1,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda_1,\lambda_2)e^{i\lambda_2 y}d\lambda_2 \tag{3-51}$$

将(3-51)式代入(3-50)式，可知

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda_1,\lambda_2)e^{i\lambda_2 y}d\lambda_2\right\}e^{i\lambda_1 x}d\lambda_1\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda_1,\lambda_2)e^{i(\lambda_1 x+\lambda_2 y)}d\lambda_1 d\lambda_2\end{aligned} \tag{3-52}$$

(3-52)式便是二维傅氏变换(3-49)的反演公式，或者称为傅氏逆变换公式.

值得注意的是，在推导(3-49)和(3-52)式时，我们是分别经过对 x 再对 y 取傅氏变换而推导出来的. 这就是说，二维傅氏变换可以分解成二次一维的傅氏变换，这一特点在应用当中颇为重要.

和二维傅氏变换相类似地可以推出三维和四维的傅氏变换分别为

$$g(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\iiint_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z)e^{-i(\lambda_1 x+\lambda_2 y+\lambda_3 z)}dxdydz \tag{3-53}$$

和

$$f(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)e^{i(\lambda_1x+\lambda_2y+\lambda_3z)}d\lambda_1d\lambda_2d\lambda_3 \quad (3\text{-}54)$$

以及

$$g(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=\iiiint_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z,t)e^{-i(\lambda_1x+\lambda_2y+\lambda_3z+\lambda_4t)}dxdydzdt \quad (3\text{-}55)$$

和

$$f(x,y,z,t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\iiiint_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)e^{i(\lambda_1x+\lambda_2y+\lambda_3z+\lambda_4t)}d\lambda_1d\lambda_2d\lambda_3d\lambda_4 \quad (3\text{-}56)$$

一般地，在 n 维空间里，设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 个自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，并且，于 $-\infty<x_1<+\infty,-\infty<x_2<+\infty,\cdots,-\infty<x_n<+\infty$ 上绝对可积，则定义 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的傅氏变换为

$$\begin{aligned}g(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)&=F[f(x_1,x_2,\cdots,x_n)]\\&=\iint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)e^{-i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)}dx_1dx_2\cdots dx_n\end{aligned} \quad (3\text{-}57)$$

(3-57)式的傅氏逆变换公式为

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=F^{-1}[g(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)]\\&=\frac{1}{(2\pi)^n}\iint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int g(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)e^{i(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)}d\lambda_1d\lambda_2\cdots d\lambda_n\end{aligned} \quad (3\text{-}58)$$

(2)矢量表示法. 在物理、力学以及工程技术中，常常用矢量表示法表示多元函数的傅氏变换. 这样，既能使公式写起来简捷，计算时方便，又特别富有鲜明的物理或力学意义.

所谓矢量表示法，就是将变量 $x_1,x_2,x_3\cdots,x_n$ 看作某一矢量的 n 个分量，而把 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 看作另一矢量的分量，即

$$r=(x_1,x_2,\cdots,x_n),k=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

于是(3-57)和(3-58)二式，可分别表示为

$$g(k)=F[f(r)]=\iint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int f(r)e^{-ir\cdot k}dr \quad (3\text{-}57)'$$

$$f(\boldsymbol{r}) = F^{-1}[g(\boldsymbol{k})] = \frac{1}{(2\pi)^n}\iint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int g(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{k} \quad (3\text{-}58)'$$

其中 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}$ 为两个矢量之内积，即

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

(3-57)′、(3-58)′二式的维数不限，例如，在物理应用中，最常用的是三维傅氏变换，只要令

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{l} \qquad \boldsymbol{k} = \lambda_1\boldsymbol{i} + \lambda_2\boldsymbol{j} + \lambda_3\boldsymbol{l}$$

则(3-57)′和(3-58)′就相应地表示为

$$g(\boldsymbol{k}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}}d\boldsymbol{r} \quad (3\text{-}59)$$

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}}d\boldsymbol{k} \quad (3\text{-}60)$$

其中 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}=\lambda_1 x+\lambda_2 y+\lambda_3 z$. 这些积分遍及相应矢量的所有值. 在三维傅氏变换的(3-59)和(3-60)二式中，若用 $\boldsymbol{r}$ 表示位置矢量，则 $e^{i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}}$就表示波矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的静态平面谐波(这时波长 $\lambda=\frac{2\pi}{|\boldsymbol{k}|}$). 其波阵面和 $\boldsymbol{k}$ 垂直. 因此，(3-60)式说明，一个随位置任意变化的量$f(\boldsymbol{r})$，可表示为各种方向、各种波长的平面谐波的积分和. 由于(3-59)、(3-60)的矢量表示，我们给出上述物理解释，就非常容易理解其含义了.

相应的四维傅氏变换也可以表示为

$$g(\boldsymbol{k},\lambda) = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{r},t)e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\lambda t)}d\boldsymbol{r}dt \quad (3\text{-}61)$$

和

$$f(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iiiint_{-\infty}^{-\infty} g(\boldsymbol{k},\lambda)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\lambda t)}d\boldsymbol{k}\cdot d\lambda \quad (3\text{-}62)$$

其中 λ 和 t 分别表示角频率和时间. 和三维傅氏变换的物理意义一样，(3-62)式说明，任意一个依赖于时间 t 的位置函数 $f(\boldsymbol{r},t)$都可以表示成各种波长、各种方向、各种频率的简谐平面行波的积分和.

例 3.8 求高斯分布函数 $f(r)=Ae^{-a^2r^2}$的傅氏变换. 其中 $r^2=x^2+y^2$.

解 我们先求 $f(x)=Ae^{-a^2x^2}$的傅氏变换，即

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-a^2x^2}e^{-i\lambda x}dx = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a^2x^2+i\lambda x)}dx$$

$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-a^2[x^2+\frac{i\lambda}{a^2}x+(\frac{i\lambda}{2a^2})^2-(\frac{i\lambda}{2a^2})^2]\}dx$$

$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-a^2(x+\frac{i\lambda}{2a^2})^2-(\frac{i\lambda}{2a^2})^2]\}dx$$

$$=\frac{A}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-a^2(x+\frac{i\lambda}{2a^2})^2\}/e^{\lambda^2/4a^2}d(x+i\lambda/2a^2)$$

$$=\frac{A\sqrt{\pi}}{a}e^{-\lambda^2/4a^2}$$

其中最后一步用到了概率积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$$

其次,计算

$$g(\lambda_1,\lambda_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-a^2r^2}\cdot e^{-i(\lambda_1x+\lambda_2y)}dxdy$$

$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2x^2-a^2y^2}\cdot e^{-i(\lambda_1x+\lambda_2y)}dxdy$$

$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(a^2y^2+i\lambda_2y)}dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(a^2x^2+i\lambda_1x)}dx$$

由 $g(\lambda)=\frac{A\sqrt{\pi}}{a}e^{-\lambda^2/4a^2}$ 可知

$$g(\lambda_1,\lambda_2)=A\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\lambda_2^2/4a^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\lambda_1^2/4a^2}=\frac{A\pi}{a^2}e^{-k^2/4a^2}$$

其中 $k^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2$.

(3)多维傅氏变换的性质.一维傅氏变换的许多性质和结论,都可以类似地推广到多维情形.以下只是给出一些既重要又常用的性质和结论.读者不难仿照一维情形独立地予以验证.

性质 3.13 线性性.设 r、k 是两个不同的矢量,α,β 是两个常数,f_1、f_2 是两个多元函数(以下皆同),则

$$F[\alpha f_1(r)+\beta f_2(r)]=\alpha F[f_1(r)]+\beta F[f_2(r)] \quad (3\text{-}63)$$

性质 3.14 微商的变换.即

$$F\left[\frac{\partial f(r)}{\partial x_j}\right]=i\lambda_j F[f(r)] \quad (1\leqslant j\leqslant n) \quad (3\text{-}64)$$

性质 3.15 变换的微商.即

$$\frac{d}{d\lambda_j}F[f(r)] = F[-ix_j f(r)] \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \tag{3-65}$$

把定义 3.2 关于两个函数褶积的概念，推广到多元函数中，便得

$$f_1(r) * f_2(r) = \iint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int f_1(r-R)f_2(R)dR \tag{3-66}$$

其中 $R=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为一参变矢量. 于是有

性质 3.16 褶积定理(褶积的变换)，即

$$F[f_1(r) * f_2(r)] = F[f_1(r)] \cdot F[f_2(r)] \tag{3-67}$$

性质 3.17 变换的褶积. 即

$$F[f_1(r) \cdot f_2(r)] = \frac{1}{(2\pi)^n}F[f_1(r)] * F[f_2(r)] \tag{3-68}$$

性质 3.18 分离变量. 即如果 $f(r)$可表示为 n 个分别只依赖 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数之积，则 $f(r)$的傅氏变换将是每个一元函数变换的乘积. 数学表达式为，若

$$f(r) = h_1(x_1)h_2(x_2)\cdots h_n(x_n)$$

则

$$g(k) = F[f(r)] = F[(h_1(x_1)] \cdot F[h_2(x_2)]\cdots F[h_n(x_n)] \tag{3-69}$$

可见，利用(3-69)式，只要知道了各个一维变换，就可以得到整个多维变换. 类似的结果，对任意维都成立.

性质 3.19 若将函数 $f(r)$整个平移 r_0，则其变换要乘以$e^{\pm ik\cdot r_0}$. 反之，对 $f(r)$乘以 $e^{\pm ik_0\cdot r}$就使它的变换平移干k_0. 即，若$f(r)$的变换为 $F(k)$则

$$F[f(r \pm r_0)] = e^{\pm ik\cdot r_0}g(k) \tag{3-70}$$

和

$$F[e^{\pm ik_0\cdot r}f(r)] = g(k \mp k_0) \tag{3-71}$$

利用(3-70)式，我们就可以直接写出函数

$$f(r) = A\delta(r - r_0)$$

的傅氏变换为

$$g(k) = e^{-ik\cdot r_0}$$

并且，对任意维数都成立.

3.1.4 傅氏变换法的应用举例

下面通过具体问题来说明傅氏变换法及其性质的应用，特别是说明使用该法的条件及过程.

例 3.9 求例题 3.8 中三维高斯分布函数

$$f(r) = Ae^{-a^2r^2}$$

的傅氏变换，其中 $r^2=x^2+y^2+z^2$.

解 除了维数的增加外，其方法及过程和例 3.8 完全一样. 即

$$\begin{aligned}
g(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(x^2+y^2+z^2)}e^{-i\lambda\cdot r}dr \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2-i\lambda_1x}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y^2-i\lambda_2y}dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2z^2-i\lambda_3z}dz \\
&= A\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\lambda_1^2/4a^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\lambda_2^2/4a^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\lambda_3^2/4a^2} \\
&= \frac{A\sqrt{\pi^3}}{a^3}e^{-(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)/4a^2} = \frac{A\pi^{\frac{3}{2}}}{a^3}e^{-k^2/4a^2}
\end{aligned}$$

这个例题既说明求三元函数傅氏变换的方法，又指明了性质 3.18 的具体应用.

例 3.10 利用傅氏变换法，求定解问题

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\
u(x,0) = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \\
u_t|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty)
\end{cases}$$

的解.

解 将泛定方程和定解条件均取 x 的傅氏变换. 并令

$$\tilde{u}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\lambda x}dx, \qquad \tilde{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-i\lambda x}dx$$

$$\tilde{\psi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)e^{-i\lambda x}dx$$

则定解问题转化为二阶齐次常微分方程初值问题，即

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\tilde{u}}{dt^2}=-a^2\lambda^2\tilde{u}\\ \tilde{u}\big|_{t=0}=\tilde{\varphi}(\lambda)\\ \dfrac{d\tilde{u}}{dt}\bigg|_{t=0}=\tilde{\psi}(\lambda)\end{cases}$$

这个常微分方程的解为

$$\tilde{u}=C_1\cos a\lambda t+D_1\sin a\lambda t$$

由定解条件可知 $C_1=\tilde{\varphi}(\lambda),D_1=\dfrac{1}{a\lambda}\tilde{\psi}(\lambda)$. 于是

$$\tilde{u}=\tilde{\varphi}(\lambda)\cos a\lambda t+\frac{1}{a\lambda}\tilde{\psi}(\lambda)\sin a\lambda t$$

注意对 $\tilde{u}$ 取逆变换时,等于如下两个逆变换之和,即

$$F^{-1}\left[\tilde{\psi}(\lambda)\cdot\frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}\right] \text{ 及 } F^{-1}[\tilde{\varphi}(\lambda)\cos a\lambda t]$$

因为

$$f_{ab}=F^{-1}\left[\frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & \text{当 } |x|\leqslant at \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } |x|>at \text{ 时}\end{cases}$$

而

$$\begin{aligned}F^{-1}\left[\tilde{\psi}(\lambda)\cdot\frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}\right]&=F^{-1}[\tilde{\psi}(\lambda)\cdot\tilde{f}_{ab}]=\psi(x)*f_{ab}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)f_{ab}(\xi-x)d\xi=\int_{x-at}^{x+at}\frac{1}{2a}\psi(\xi)d\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^{-1}[\tilde{\varphi}(\lambda)\cos a\lambda t]&=\varphi(x)*\frac{1}{2}[\delta(x-at)+\delta(x+at)]\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)[\delta(\xi-x+at)+\delta(\xi-x-at)]d\xi\\&=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]\end{aligned}$$

故,原定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \qquad (3\text{-}72)$$

这就是我们在一般《数学物理方程》书中常见的达朗贝尔公式.

类似地讨论波在空中的传播规律，要求解如下的三维波动方程的定解问题，即

例 3.11 用傅氏变换法求定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) & (-\infty<x,y,z<+\infty,t>0)\\ u(M,t)|_{t=0}=\varphi(M) & (-\infty<x,y,z<+\infty)\\ \left.\dfrac{\partial u(M,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(M) & (-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}$$

其中 M 为空间域中一动点，即 $M(x,y,z)$.

解 将泛定方程和定解条件都对 x,y,z 取傅氏变换得

$$\tilde{u}_{tt}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,t)=-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\tilde{u}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,t)$$

$$\tilde{u}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0)=\tilde{\varphi}$$

$$\tilde{u}_t(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0)=\tilde{\psi}$$

其中 $\tilde{u}_{tt}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,t)=F\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$，$\tilde{\varphi}=F[\varphi]$，$\tilde{\psi}=F[\psi]$，根据泛定方程的通解公式及其定解条件，得

$$\tilde{u}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,t)=\tilde{\varphi}\cdot\cos a\rho t+\frac{\tilde{\psi}}{a\rho}\sin a\rho t$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\varphi}\cdot\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\right)+\tilde{\psi}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}$$

注意 $\dfrac{\sin a\rho t}{a\rho}$ 的逆傅氏变换为 $\dfrac{1}{4\pi ar}[\delta(r-at)-\delta(r+at)]$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\rho=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}$. 于是，有

$$u(M,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi*\frac{1}{4\pi ar}[\delta(r-at)-\delta(r+at)]\right\}$$

$$+\psi*\frac{1}{4\pi ar}[\delta(r-at)-\delta(r+at)]$$

又根据褶积定理知

$$\varphi*\frac{1}{4\pi ar}[\delta(r-at)-\delta(r+at)]$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\{[\delta(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}-at)$$

$$-\delta(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}+at)]/\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\}d\xi d\eta d\zeta$$

因为 $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}+at>0$，故由 δ-函数的定义得

$$\delta(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}+at)=0$$

并且

$$\delta(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}-at) = \begin{cases} 0 & \text{当 } r \neq at \text{ 时} \\ \infty & \text{当 } r = at \text{ 时} \end{cases}$$

可知褶积积分是展布在以 $M(x,y,z)$ 为心，at 为半径的球面上的，设 S_{at}^M 表示这个球面，并作球坐标变换

$$x-\xi=\rho'\sin\theta\cos\varphi'$$

$$y-\eta=\rho'\sin\theta\sin\varphi'$$

$$z-\zeta=\rho'\cos\theta$$

其中点 (ξ,η,ζ) 是动点，ρ' 是点 (ξ,η,ζ) 与 $M(x,y,z)$ 点之距离. 将其代入三重褶积积分得

$$\varphi * \frac{1}{4\pi ar}[\delta(r-at)-\delta(r+at)]$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{+\infty}\varphi[x-\rho'\sin\theta\cos\varphi', y-\rho'\sin\theta\sin\varphi',$$

$$z-\rho'\cos\theta]\frac{\delta(\rho'-at)}{\rho'}\rho'^2\sin\theta d\rho'$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi[x-at\sin\theta\cos\varphi', y-at\sin\theta\sin\varphi',$$

$$z-at\cos\theta]t(at)\sin\theta d\theta d\rho'$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{\varphi[x-at\sin\theta\cos\varphi', y-at\sin\theta\sin\varphi',$$

$$z-at\cos\theta]/t\}(at)^2\sin\theta d\theta d\rho'$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{S_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds$$

其中由三重积分变为二重积分时，用到了 δ-函数的运算性质. 最后一步用到面积元素 $ds=\rho'^2d\omega, d\omega=\sin\theta d\theta d\varphi'$.

同理可得

$$\psi * \frac{1}{4\pi a r}[\delta(r-at)-\delta(r+at)] = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_{S_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds$$

于是，原定解问题的解为

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds + \frac{1}{4\pi a^2}\iint_{S_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds \tag{3-73}$$

这就是数学物理方程中三维波动方程的泊松公式.

从例 3.9 至例 3.11 可见用傅氏变换法解定解问题的过程是：

(1)一般是将方程两端取傅氏变换，定解条件也取傅氏变换，把偏微分方程转化为常微分方程.

(2)解所得的常微分方程，求得原定解问题的变换式(即象函数).

(3)对所得的变换式取逆变换.这时一般地都要用到褶积定理，得到原定解问题的解.

这个方法一般有两大优点：

首先，适当运用 δ-函数的性质，可使复杂的运算大大简化；

其次，用分离变量法解定解问题时，遇到定解条件是非齐次，必须先齐次化以后才能求解.而使用傅氏变换法求解时，就可以略去这一步，即使是在最复杂的情况下，如方程和定解条件都是非齐次的时候，也可直接使用该法求解.

下面用傅氏变换法来解决第二章遗留的例 2.5、例 2.7 的问题.

例 3.12 求第二章例 2.5 中的定解问题

$$(B)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > \tau > 0)\\ v|_{t=\tau} = 0, \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=\tau} = \sin\omega\tau\delta(x) & (-\infty < x < +\infty)\end{cases}$$

的解 $v=v(x,t,\tau)$.

为此，设 $\bar{v}(\lambda,t,\tau)=F[v(x,t,\tau)]$，并且，由 δ-函数的性质 1.2 有

$$\left.\frac{d\bar{v}(\lambda,t,\tau)}{dt}\right|_{t=\tau} = F[\sin\omega\tau\delta(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega\tau\delta(x)e^{-i\lambda x}dx = \sin\omega\tau$$

于是，对(B)中方程及定解条件分别取傅氏变换得

$$(C)\begin{cases}\dfrac{d^2\tilde{v}}{dt^2}=-a^2\lambda^2\tilde{v}\\ \tilde{v}\big|_{t=\tau}=0,\ \dfrac{d\tilde{v}}{dt}\Big|_{t=\tau}=\sin\omega\tau\end{cases}$$

解此常微分方程初始问题，得

$$\begin{aligned}\tilde{v}(\lambda,t,\tau)&=-\frac{\sin a\lambda\tau\sin\omega\tau}{a\lambda}\cos a\lambda t+\frac{\cos a\lambda\tau\sin\omega\tau}{a\lambda}\sin a\lambda t\\&=\sin\omega\tau\,\frac{\sin a\lambda(t-\tau)}{a\lambda}\end{aligned}$$

注意，当 $t-\tau\geqslant 0$ 时，$\dfrac{\sin a\lambda(t-\tau)}{a\lambda}$是脉冲函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & \text{当 } |x|\leqslant a(t-\tau)\text{ 时}\\ 0 & \text{当 } |x|>a(t-\tau)\text{ 时}\end{cases}$$

的傅氏变换，亦即

$$F[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx=\frac{\sin a\lambda(t-\tau)}{a\lambda}$$

再由傅氏变换的褶积性质，$\tilde{v}(\lambda,t,\tau)$的傅氏逆变换为

$$\begin{aligned}v(x,t,\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}(\lambda,t,\tau)e^{i\lambda x}d\lambda\\&=F^{-1}[\tilde{v}(\lambda,t,\tau)]=F^{-1}\{F[\sin\omega\tau\delta(x)]\cdot F[f(x)]\}\\&=\sin\omega\tau\delta(x)*f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\omega\tau\delta(x-\xi)d\xi\\&=\frac{\sin\omega\tau}{2a}\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)}\delta(x-\xi)d\xi^{*}\end{aligned}$$

这就是第二章例 2.5 的(2-45)式的结果.

例 3.13 求第二章例 2.7 中定解问题

---

* 这个式子显然也可以写为

$$\begin{aligned}v(x,t,\tau)&=[\sin\omega\tau\delta(x)]*f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega\tau\delta(\xi)f(x-\xi)d\xi\\&=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\sin\omega\tau\delta(\xi)d\xi=\frac{\sin\omega\tau}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\delta(\xi)d\xi\end{aligned}$$

从而，第二章例 2.5 定解问题(A)之解也可写为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\sin\omega\tau d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\delta(\xi)d\xi$$

$$(B)\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ \qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty,t>\tau>0) \\ v|_{t=\tau}=f(x,y,z,\tau) \qquad (-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}$$

的解 $v=v(x,y,z,t,\tau)$.

解 我们采用傅氏变换法解之，为此，记

$$\begin{aligned}\tilde{v}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,t,\tau)&=F[v(x,y,z,t,\tau)]\\&=\iiint_{-\infty}^{+\infty}v(x,y,z,t,\tau)e^{-i(\lambda_1x+\lambda_2y+\lambda_3z)}dxdydz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\tau)&=F[f(x,y,z,\tau)]\\&=\iiint_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z,\tau)e^{-i(\lambda_1x+\lambda_2y+\lambda_3z)}dxdydz\end{aligned}$$

于是，对(B)的方程及初始条件分别取傅氏变换可得

$$(C)\begin{cases}\dfrac{d\tilde{v}}{dt}=-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\tilde{v}\\ \tilde{v}|_{t=\tau}=\tilde{f}\end{cases}$$

解此常微分方程初值问题，得

$$\tilde{v}=\tilde{f}e^{-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)(t-\tau)}$$

因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4a^2t}\cdot e^{-i\lambda x}dx=e^{-a^2\lambda^2t}$$

所以

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{8a^3[\pi(t-\tau)]^{\frac{3}{2}}}e^{-(x^2+y^2+z^2)/4a^2(t-\tau)}e^{-i(\lambda_1x+\lambda_2y+\lambda_3z)}dxdydz$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}e^{-i\lambda_1x}dx\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-y^2/4a^2(t-\tau)}e^{-i\lambda_2y}dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-z^2/4a^2(t-\tau)}e^{-i\lambda_3z}dz$$

$$=e^{-a^2\lambda_1^2(t-\tau)}\cdot e^{-a^2\lambda_2^2(t-\tau)}\cdot e^{-a^2\lambda_3^2(t-\tau)}=e^{-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)(t-\tau)}$$

即

$$F\left[\frac{1}{8a^3[\pi(t-\tau)]^{3/2}}e^{-(x^2+y^2+z^2)/4a^2(t-\tau)}\right]=e^{-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)(t-\tau)}$$

由此可知

$$
\begin{aligned}
v(x,t,z,t,\tau) &= F[\tilde{v}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,t,\tau)] \\
&= F^{-1}\left\{F[f(x,y,z,\tau)]F\left[\frac{1}{8a^3[\pi(t-\tau)]^{3/2}}e^{-(x^2+y^2+z^2)/4a^2(t-\tau)}\right]\right\} \\
&= f(x,y,z,\tau) * \left(\frac{1}{8a^3[\pi(t-\tau)]^{3/2}}e^{-(x^2+y^2+z^2)/4a^2(t-\tau)}\right) \\
&= \frac{1}{8a^3[\pi(t-\tau)]^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z,\tau)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned}
$$

这样定解问题(C)的解就求出来了.

§3.2 拉氏变换

3.2.1 拉氏变换的概念

傅氏变换虽然有许多很好的运算性质，用处也极广，但是，由于它有两大缺点，因而在应用上还是受到很大的限制. 第一，要求象原函数于$(-\infty,+\infty)$上绝对可积之条件过强，许多函数，甚至象多项式、三角函数、单位函数、线性函数等极为简单的函数，都不能满足这一条件，从而，严格地说，都未必能作傅氏变换；第二，要求象原函数在整个数轴上有定义，但是，在许多实际应用中，如物理、无线电技术等方面，许多以时间 t 作为自变量的函数，常常是于 $t<0$ 时是无意义的，或者根本就不需要考虑的，这样的函数都不能取其傅氏变换.

为了克服上述两大缺点，人们就想到对已知函数 $\varphi(t)$ 加以改造，即乘以因子 $u(t)e^{-\alpha t}(\alpha>0)$. 由于 $u(t)$是单位函数，就可以使象原函数的定义域，由$(-\infty,+\infty)$变为$[0,+\infty)$. 又由于 $e^{-\alpha t}(\alpha>0)$是激烈衰减函数，因而，有可能使其变为绝对可积.

因为象原函数的改变，引起了核函数和积分区域的变化，从而引入了所谓拉普拉斯变换.

设函数 $f(t)$于$[0,+\infty)$上有定义，为了取傅氏变换，将其开拓到整个数轴，即令

$$\overline{f(t)} = \begin{cases} f(t) & \text{当 } t \geqslant 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } t < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

另设 $r>0$，并令

$$f_1(t) = e^{-rt}\overline{f(t)} = \begin{cases} e^{-rt}f(t) & \text{当 } t \geqslant 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } t < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

则由傅氏逆变换公式，得

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi$$

即

$$e^{-rt}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}d\lambda \int_{0}^{+\infty} f(\xi)e^{-r\xi}e^{-i\lambda\xi}d\xi$$

故得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty} f(\xi)e^{-(r+i\lambda)\xi}d\xi\right)e^{(r+i\lambda)t}d\lambda \qquad (3\text{-}74)$$

于(3-74)中令 $p=r+i\lambda, dp=id\lambda$（注意 $r>0$ 是常数），从而，(3-74)式可以改写为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty} e^{pt}dp \int_{0}^{+\infty} f(\xi)e^{-p\xi}d\xi \qquad (3\text{-}75)$$

这里的积分应理解为主值积分，即

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty} e^{pt}dp \int_{0}^{+\infty} e^{-p\xi}f(\xi)d\xi = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{r-iR}^{r+iR} e^{pt}dp \int_{0}^{+\infty} e^{-p\xi}f(\xi)d\xi$$

于(3-75)式中，记

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(\xi)e^{-p\xi}d\xi \qquad (3\text{-}76)$$

则(3-75)式变为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty} F(p)e^{pt}dp \qquad (t>0) \qquad (3\text{-}77)$$

于是，由(3-76)式所确定的将 $f(x)$ 变为 $F(p)$ 的积分变换式称为拉普拉斯变换（简称为拉氏变换）. 记为 $L[f(t)]$，亦即

$$L[f(t)] = \int_{0}^{+\infty} e^{-p\xi}f(\xi)d\xi$$

而将 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(p)$，还原为 $f(t)$ 的积分变换(3-77)式，称为

$F(p)$的拉普拉斯逆变换. 记为 $L^{-1}[F(p)]$，亦即

$$L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p)e^{pt}dp$$

于是可见

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = L^{-1}\{L[f(t)]\}$$

和傅氏变换一样，称 $f(t)$为初始函数或象原函数，而 $F(p)$则称为变换函数或象函数.

3.2.2 拉氏变换存在定理

前面只是借助于形式地推演，引进了拉普拉斯变换的概念. 为了使其具有严格的理论基础，有必要从数学上进一步加以阐述.

首先可以肯定，拉氏变换存在的条件要比傅氏变换存在的条件弱得多，但必竟还是要有一定的条件，那么，一个函数究竟具备什么样的条件，拉氏变换一定存在呢？为此，先给出初始函数的确切定义.

定义 3.3 设 $f(t)$是定义于$(-\infty,+\infty)$上的实变量 t 的复值函数，我们把满足下列条件的函数 $f(t)$叫做拉氏变换的初始函数.

1° 当 $t\geqslant 0$ 时，$f(t)$在任一有限区间上连续或分段连续；

2° 当 $t<0$ 时，$f(t)=0$；

3° 存在 $M>0, S_0>0$，使得

$$|f(t)| \leqslant Me^{s_0 t} \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

这里 s_0 称为 $f(t)$的增长指数(或称增大指数).

从应用的观点来看，大多数描述物理过程的作为时间 t 的函数 $f(t)$，都适合对初始函数所要求的条件 1°和 2°，至于 3°，由于$f(t)$所描述的物理过程，总是从某一时刻开始，因此，为方便计，总可以把开始时刻取为零. 所以，$f(t)$于 $t\geqslant 0$ 上有定义，至于 $t<0$ 时 $f(t)$无意义，则可以补充定义，使 $f(t)=0$.

定理 3.2〔拉氏变换存在定理〕 设 $f(t)$为初始函数，s_0 为 $f(t)$的增长指数，则象函数 $F(p)$在半平面 $\mathrm{Re}p>s_0$ 上一定存在，此时积分 $\int_0^{+\infty} f(\xi)e^{-p\xi}d\xi$ 绝对而且一致收敛，$F(p)$于这半平面内为解析函数

(即 $F(p)$在这半平面内处处可求导数).

证明 于任意 $\mathrm{Re}p=s>s_0$,由

$$|f(t)e^{-pt}|\leqslant|f(t)|\,|e^{-(s+i\lambda)t}|\leqslant Me^{s_0t}\cdot e^{-st}=Me^{-(s-s_0)t}$$

而积分$\int_0^{+\infty}Me^{-(s-s_0)t}dt$是收敛的,所以,积分$\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$于$\mathrm{Re}p>s_0$内收敛,而且是绝对收敛.亦即象函数 $F(p)$于半平面 $\mathrm{Re}p>s$ 上一定存在.

又由含参变量广义积分的性质可知,对任意在半平面 $\mathrm{Re}p>s_0$ 的 p_0 点,恒存在 S_1,使 $\mathrm{Re}p_0>s_1>s_0$,有积分$\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$一致收敛,并且

$$\left|\frac{\partial}{\partial p}[f(t)e^{-pt}]\right|=|f(t)(-t)e^{-pt}|\leqslant Mte^{-(s-s_0)t}\leqslant Mte^{-(s_1-s_0)t}$$

因为$\int_0^{+\infty}Mte^{-(s_1-s_0)t}dt$收敛,于是,根据维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法可知

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}[f(t)e^{-pt}]dt$$

于 $\mathrm{Re}p\geqslant s_1$ 上一致收敛.从而,$F(p)$于 $\mathrm{Re}p\geqslant s_1$ 处的微商存在,且

$$F'(p)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}[f(t)e^{-pt}]dt$$

特别地,于 $p=p_0$ 处(p_0 是满足 $\mathrm{Re}p_0>s_0$ 的任一常数)$F(p)$于半平面 $\mathrm{Re}p>s_0$ 上为解析函数.

推论 3.2 设 $F(p)$是拉氏变换的象函数,则

$$\lim_{\mathrm{Re}p\to\infty}F(p)=0 \tag{3-78}$$

证明 由定理 3.2 的证明中,于 $\mathrm{Re}p>s_0$ 时,有

$$\left|\int_0^{+\infty}f(\xi)e^{-p\xi}d\xi\right|\leqslant\frac{M}{s-s_0}$$

故

$$\lim_{\mathrm{Re}p\to\infty}F(p)=\lim_{s\to\infty}F(p)=0$$

这个推论说明,并非任何函数都可以作为象函数 $F(p)$.例如,非零常数(1 除外)或 p 的多项式显然不能是任何初始函数的象函数.

定理 3.3〔拉氏逆变换存在定理〕 设 $f(t)$是拉氏变换的初始函数，$F(p)$为其象函数，则有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt}dp$$

其中积分路径为任一直线 $\mathrm{Re}p=a>s_0$，s_0 为 $f(t)$的增长指数(如图 3-1)

证明 由拉氏变换的定义可知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iR}^{a+iR}F(p)e^{pt}dp$$

$$=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iR}^{a+iR}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\xi)e^{-p\xi}d\xi\right]e^{pt}dp$$

$$\overset{\text{令 } p=a+i\lambda}{=\!=\!=\!=\!=}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-(a+i\lambda)\xi}d\xi\right]e^{(a+i\lambda)t}id\lambda$$

$$=\lim_{R\to\infty}\frac{e^{at}}{2\pi i}\int_{-R}^{R}e^{i\lambda t}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda\xi}[e^{-a\xi}f(\xi)]d\xi$$

因为 $e^{-a\xi}f(\xi)$于$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，且 $f(\xi)e^{-p\xi}$于$(-\infty,+\infty)$上按段光滑，从而，满足傅氏积分公式要求的条件，所以有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt}dp=e^{at}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}e^{i\lambda t}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda\xi}[e^{-a\xi}f(\xi)]d\xi$$

$$=e^{at}[e^{-at}f(t)]=f(t)$$

定理 3.2、定理 3.3 分别给出拉氏变换和逆变换存在的条件，有两点应该特别强调的，即：第一，所说的条件仅是充分的，亦即若条件不满足，拉氏变换或逆变换仍有可能存在. 例如 $f(t)=t^{-1/2}$在 $0\leqslant t\leqslant T$ 内不是分段连续的，但 $L[t^{-1/2}]$还是存在的；第二，只要拉氏变换存在，它总是唯一的，然而这对逆变换却未必成立，不过可以证明，如果两个函数有同样的拉氏变换，则它们不能在任何一个具有正的长度(不管是多么小)的区间上相互不同，这个结

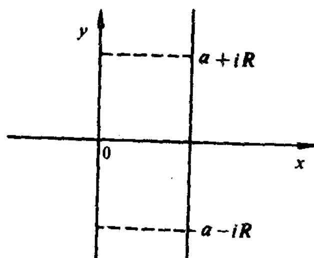


图 3-1

论常被称为勒奇(Lerch)定理. 该定理实际上是指出，在实际应用中，可以认为逆变换本质上是唯一的，特别，若两个连续函数具有相同的拉氏变换时，则它们必然是恒等的.

例 3.14　求下列各函数的拉氏变换：

(a) $f(t)=e^{at}$；　(b) $f(t)=\cos\omega t$；　(c) $f(t)\sin\omega t$；　(d) $f(t)=\sin t\cos t$

解　根据拉氏变换的定义即(3-76)式，分别计算如下

$$(a)\quad L[e^{at}]=\int_0^{+\infty}e^{at}e^{-pt}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-(p-a)t}dt=\frac{-e^{-(p-a)t}}{p-a}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-a}\quad(3\text{-}79)$$

其中假定 $p-a>0$，即 $p>a$.

(b)　对 $p>0$，我们先求 $e^{i\omega t}$ 的拉氏变换，即

$$L[e^{i\omega t}]=\int_0^{+\infty}e^{i\omega t}e^{-pt}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-(p-i\omega)t}dt=\frac{-e^{-(p-i\omega)t}}{p-i\omega}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-i\omega}\quad(3\text{-}80)$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos\omega t+i\sin\omega t)e^{-pt}dt$$

$$=\frac{p+i\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{p}{p^2+\omega^2}+i\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

然后再取实部，就有

$$L[\cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2}\quad(3\text{-}81)$$

(c)　根据(b)中结果有 $L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

(d)　因为 $\sin 2t=2\sin t\cos t$，所以 $\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$ 故由(c)的结果可得

$$L[\sin t\cos t]=\frac{1}{2}L[\sin 2t]=\frac{1}{2}\,\frac{2}{p^2+2^2}=\frac{1}{p^2+4}$$

例 3.15　求单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的拉氏变换.

解 根据(3-76)式，并利用 δ-函数的性质，有

$$L[\delta(t)]=\int_0^{+\infty}\delta(t)e^{-pt}dt=e^{-pt}|_{t=0}=1 \tag{3-82}$$

由此可知，δ-函数的拉氏变换为 1. 该例还告诉我们，象函数 $F(p)=1$ 的初始函数是 $\delta(x)$. 那么，还可以得到任何非零常数 A 的初始函数为 $A\delta(x)$. 这一点在后面许多例题的实际运算中要经常用到.

3.2.3 拉氏变换的性质

拉氏变换的几个重要性质，在实际应用中都是不可缺少的. 下面逐一地介绍，为了叙述上的方便，凡是要求拉氏变换的函数，假设都满足初始函数的条件要求，并且，把这些函数的增长指数都统一地取为 s.

性质 3.20 线性性. 设 $f(t)$，$g(t)$ 均为初始函数，且 $L[f(t)]=F(p)$，$L[g(t)]=G(p)$，则对于任意不全为零的常数 α、β，恒有

$$\begin{aligned}L[\alpha f(t)+\beta g(t)]&=\alpha L[f(x)]+\beta L[g(t)]\\ L^{-1}[\alpha F(p)+\beta G(p)]&=\alpha L^{-1}[F(p)]+\beta L^{-1}[G(p)]\end{aligned} \tag{3-83}$$

只要应用(3-76)和(3-77)二式易证. 这个性质说明函数线性组合的拉氏变换，等于各函数拉氏变换的线性组合.

性质 3.21 微商的变换. 对任何自然数 n，只要 $f(x)$，$f'(t)$，$f''(t)$，…，$f^{(n)}(t)$ 皆为初始函数，则有

$$\begin{aligned}L[f^{(n)}(t)]=&\ p^nL[f(t)]-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)\\ &-\cdots-f^{(n-1)}(0)\end{aligned} \tag{3-84}$$

式中 $f^{(k)}(0)(k=1,2,\cdots,n-1)$ 应理解为 $\lim\limits_{t\to 0^+}f^{(k)}(t)$ * (亦即 $f^{(k)}(0+0)$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$)，更若有 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，则

$$L[f^{(n)}(t)]=p^nL[f(t)]$$

证明 用数学归纳法证明如下：

当 $n=1$ 时，有

---

* 亦即当 $f(t)$ 在 $t=0$ 处不连续时，$f(0)$ 应理解为 $f(0+0)$，以下同.

$$L[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-pt}df(t) = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)de^{-pt}$$

$$= -f(0) + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = pL[f(t)] - f(0)$$

其中 $f(t)e^{-pt}\to 0$(当 $t\to\infty$时).

设当 $n=k$ 时,结论成立,即

$$L[f^{(k)}(t)] = p^kL[f(t)] - p^{k-1}f(0) - p^{k-2}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0)$$

要证当 $n=k+1$ 时,结论成立.事实上

$$\begin{aligned} L[f^{(k+1)}(t)] &= L\{[f^{(k)}(t)]'\} \\ &= pL[f^{(k)}(t)] - f^{(k)}(0) \\ &= p\{p^kL[f(t)] - p^{k-1}f(0) - p^{k-2}f'(0) \\ &\quad - \cdots - f^{(k-1)}(0)\} - f^{(k)}(0) \\ &= p^{k+1}L[f(t)] - p^kf(0) - p^{k-1}f'(0) \\ &\quad - \cdots - pf^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0) \end{aligned}$$

于是,由数学归纳法可知,对任意自然数 n,(3-84)式都成立.

这个性质提供了将 $f(t)$的微分方程转化为 $F(p)$的代数方程的强有力的方法.使拉氏变换法在解常微分方程和解偏微分方程中有着广泛的应用.

例 3.16 应用(3-84)式,求函数 $f(x)=x^k$ 的拉氏变换,其中 k 是正整数.

解 由于 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(k-1)}(0)=0$,而 $f^{(k)}(x)=k!$,所以

$$L[k!] = L[f^{(k)}(x)] = p^kL[f(x)] - p^{k-1}f(0) - p^{k-2}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0)$$

即

$$L[k!] = p^kL[f(x)] = p^KL[x^k]$$

又知

$$L[k!] = k!L[1] = \frac{k!}{p}$$

故

$$L[t^k] = \frac{L[k!]}{p^k} = \frac{k!}{p^{k+1}} \qquad (\mathrm{Re}(p) > 0)$$

性质 3.22 变换的微商. 若 $F(p)=Lf[(t)]$,则

$$F^{(n)}(p) = L[(-t)^n f(t)] \tag{3-85}$$

证明 由于 $F(p)$于半平面 $\mathrm{Re}(p)>s_0$ 上解析,因此,$F(p)$于此半平面上可对 p 微分任意多次. 此外,对于半平面 $\mathrm{Re}(p)>s_0$ 的任意点 p_0,恒存在 S_1 使得当 $\mathrm{Re}(p_0)>s_1>s_0$ 时,积分$\int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-pt}dt$于 $\mathrm{Re}(p)\geqslant s_1$ 上一致收敛(而 $t^n f(t)e^{-pt}$对 t 按段连续,对 p 连续),因而,可于积分号下求微分,故

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n\int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-pt}dt = L[(-t)^n f(t)]$$

这个性质说明,只要 $L[f(t)]$为已知,则多项式 $p_n(t)$与 $f(t)$之积的拉氏变换就可求得. 事实上,设 $p_n(t)=a_n t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1 t+a_0$,则

$$\begin{aligned} L[p_n(t)f(t)] &= a_n L[t^n f(t)] + a_{n-1}L[t^{n-1}f(t)] \\ &\quad + \cdots + a_1 L[tf(t)] + a_0 L[f(t)] \\ &= (-1)^n a_n F^{(n)}(p) + (-1)^{n-1}a_{n-1}F^{(n-1)}(p) \\ &\quad + \cdots + a_1(-1)F'(p) + a_0 F(p) \end{aligned}$$

例 3.17 已知 $L[e^{p_0t}]=\dfrac{1}{p-p_0}$,求 $L[t^n e^{p_0t}]$.

解 由性质 3.22 可得

$$\begin{aligned} L[t^n e^{p_0t}] &= L[(-1)^{2n}t^n e^{p_0t}] = (-1)^n L[(-1)^n t^n e^{p_0t}] \\ &= (-1)^n \frac{d^{(n)}}{dp^n}L[e^{p_0t}] = (-1)^n \frac{d^{(n)}}{dp^n}\left(\frac{1}{p-p_0}\right) \\ &= (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{(p-p_0)^{n+1}} \\ &= \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

特别是当 $p_0=0$ 时,有 $L[t^n]=\dfrac{n!}{p^{n+1}}$,这与例 3.16 所得结果一致.

性质 3.23 积分的变换. 设 $L[f(t)]=F(p)$,则

$$L\left[\int_0^t (\xi)d\xi\right]=\frac{1}{p}F(p) \tag{3-86}$$

证明 设 $g(t)=\int_0^t f(\xi)d\xi$，易见它是初始函数，且

$$g'(t)=f(t),\ g(0)=0$$

由微分性质可知，

$$L[g'(t)]=pL[g(t)]-g(0)=pL[g(t)]$$

即

$$L[g(t)]=L\left[\int_0^t f(\xi)d\xi\right]=\frac{1}{p}L[f(t)]=\frac{1}{p}F(p)$$

推论 3.3 反复应用(3-86)式，又可得

$$L\left\{\int_0^t d\xi\int_0^t d\xi\cdots\int_0^t f(\xi)d\xi\right\}=\frac{1}{p^s}F(p) \tag{3-87}$$

性质 3.24 变换的积分. 若 $\int_T^{+\infty}F(p)dp$ 收敛，则有

$$\int_T^{+\infty}F(p)dp=L\left[\frac{f(t)}{t}\right] \tag{3-88}$$

其中，T 适合 $\mathrm{Re}(T)\geqslant a>s_0$，$s_0$ 为 $f(t)$ 的增长指数，上限 $+\infty$ 是指 $\mathrm{Re}(T)\to+\infty$.

证明 因为

$$\left|\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt\right|\leqslant M\int_0^{+\infty}e^{s_0t}e^{-at}dt$$

而不等式右端积分收敛与 $T(\mathrm{Re}(T)\geqslant a>s_0)$ 无关，故由维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法，可知积分 $\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$ 关于 T 在 $\mathrm{Re}(T)\geqslant a>s_0$ 上一致收敛. 于是，交换积分顺序有

$$\int_T^{+\infty}F(p)dp=\int_T^{+\infty}dp\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)dt\int_0^{+\infty}e^{-pt}dp=\int_0^{+\infty}f(t)\left[\frac{e^{-pt}}{t}\right]_{+\infty}^{T}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-Tt}dt=L\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

这个性质说明，只要知道 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(p)$，则 $\frac{f(t)}{t}$ 的拉氏变

换便等于$\int_{p}^{+\infty} F(p)dp$.

例 3.18 已知 $L[e^{bt}-e^{at}]=L[e^{bt}]-L[e^{at}]=\frac{1}{p-b}-\frac{1}{p-a}$,求 $L\left[\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\right]$.

解 由性质 3.24 可知

$$L\left[\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\right]=\int_{p}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sigma-b}-\frac{1}{\sigma-a}\right)d\sigma$$

$$=\ln\left|\frac{\sigma-b}{\sigma-a}\right|_{p}^{+\infty}=\ln\left|\frac{p-a}{p-b}\right|^{*}$$

性质 3.25 相似定理.即,对于任意常数 $a>0$,恒有

$$L[f(at)]=\frac{1}{a}F\left[\frac{p}{a}\right] \tag{3-89}$$

证明 设 $at=\tau$,则有

$$L[f(at)]=\int_{0}^{+\infty}f(at)e^{-pt}dt=\frac{1}{a}\int_{0}^{+\infty}f(\tau)e^{-(p/a)\tau}d\tau=\frac{1}{a}F\left[\frac{p}{a}\right]$$

其中,只有 $a>0$ 时,才有当 t 从 0 变到$+\infty$时,τ 也从 0 变到$+\infty$.

性质 3.26 延迟定理.即,对于任意 $\tau>0$,恒有

$$L[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}F(p) \tag{3-90}$$

证明 注意到 $f(t)$是初始函数,所以,当 $t<\tau$ 时,$f(t-\tau)=0$. 令 $t-\tau=t_1$,则有

$$L[f(t-\tau)]=\int_{0}^{+\infty}f(t-\tau)e^{-pt}dt$$

$$=\int_{\tau}^{+\infty}f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_{0}^{+\infty}f(t_1)e^{-p(\tau+t_1)}dt_1$$

$$=e^{-p\tau}\int_{0}^{+\infty}f(t_1)e^{-pt_1}dt_1=e^{-p\tau}F(p)$$

例 3.19 已知 $u(x)$是单位函数,而

$$f(t)=A[u(t)+u(t-\tau)+u(t-2\tau)] \qquad (A\text{ 为常数})$$

求 $L[f(t)]$.

---

* 此处用到了推论 3.2 的(3-78)式.

解 根据性质 3.20 和性质 3.26 有

$$L[f(t)]=A\{L[u(t)]+L[u(t-\tau)]+L[u(t-2\tau)]\}$$
$$=A\left(\frac{1}{p}+\frac{e^{-p\tau}}{p}+\frac{e^{-2p\tau}}{p}\right)=\frac{A}{p}[1+e^{-p\tau}+e^{-2p\tau}]$$

性质 3.27 位移定理. 对任意复常数 P_0,恒有

$$L[e^{p_0t}f(t)]=F(p-p_0) \tag{3-91}$$

证明 根据(3-76)式直接得证,即

$$L[e^{p_0t}f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{p_0t}e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(p-p_0)t}dt=F(p-p_0)$$

(3-90)、(3-91)二式说明若初始函数的自变量经延迟后的拉氏变换,等于原初始函数的拉氏变换乘以因子 $e^{-p\tau}$;如果象函数延迟了 p_0,则等于初始函数乘以因子 e^{p_0t}的拉氏变换. 该二式在应用上会给我们以很大的方便.

例 3.20 由例 3.14(b)和(c)知 $L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $L[\cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2}$,试求 $L[e^{-\lambda t}\sin\omega t]$和 $L[e^{-\lambda t}\cos\omega t]$.

解 根据(3-91)式就可以直接写出其结果

$$L[e^{-\lambda t}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$$
$$L[e^{-\lambda t}\cos\omega t]=\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$$

根据定义 3.2 及(3-32)式,拉氏变换也有如下类似褶积的定义和定理.

定义 3.4 设已知 $f_1(t)$及 $f_2(t)$都满足当 $t<0$ 时,$f_1(t)=f_2(t)=0$ 的条件,则积分

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

称为 $f_1(t)$与 $f_2(t)$的褶积,记为

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=f_1(t)*f_2(t) \tag{3-92}$$

这个定义从形式上看与傅氏变换的褶积定义相类似,实际上是不同的,不过根据所给的条件,从傅氏变换的褶积定义出发,经过简

单变形就会看到拉氏变换褶积的定义必须是(3-92)式的形式. 事实上,由定义 3.2 得

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{0} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$+ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau + \int_t^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

由所给条件当 $t<0$ 时,$f_1(t)=f_2(t)=0$,所以

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

性质 3.28 褶积定理. 已知 $L[f_1(t)]=F_1(p)$,$L[f_2(t)]=F_2(p)$,则有

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = L[f_1(t)] \cdot L[f_2(t)]$$

$$L^{-1}[F_1(p) \cdot F_2(p)] = f_1(t) * f_2(t) \tag{3-93}$$

证明 首先,因为 $f_1(t)$、$f_2(t)$均为初始函数时,所以,可以证明 $f_1(t) * f_2(t)$也是初始函数,因此,只须证明 $f_1(t)$、$f_2(t)$满足初始函数的三个条件即可. 而条件 1°、2°显然成立. 现证条件 3°,取 s_0 为 $f_1(t)$、$f_2(t)$的增长指数中较大的,则有

$$\left| \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right| \leqslant M \int_0^t e^{s_0 t} e^{s_0(t-\tau)} d\tau = M \int_0^t e^{s_0 t} d\tau = Mte^{s_0 t}$$

$$= (Mte^{-s_0 t}) e^{2s_0 t} \leqslant M^* e^{2s_0 t}$$

其中 M,M^* 均为正的常数. 故 $f_1(t) * f_2(t)$为初始函数.

其次,因为 $f_1(x) * f_2(x)$是初始函数,于是有

$$L[f_1(t) * f_2(t)]$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

显然,积分区域如图 3-2 所示(阴影部分),交换积分次序,并令 $t-\tau=u$,得

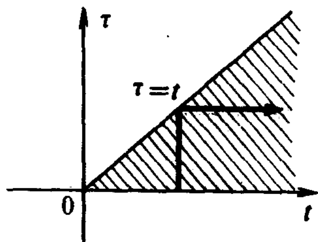


图 3-2

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_\tau^{+\infty} f_2(t-\tau) e^{-pt} dt \right] d\tau$$

$$=\int_0^{+\infty} f_1(\tau)d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p(\tau+u)} f_2(u)du$$

$$=\int_0^{+\infty} f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau \int_0^{+\infty} f_2(u)e^{-pu}du = F_1(p)F_2(p)$$

另一个式子比较易证，此处从略.

推论 3.4 已知 $L[f(t)]=F(p)$，$L[g(t)]=G(p)$，则

$$L\left[\frac{d}{dt}(f(t) * g(t))\right] = pL[f(t)]\cdot L[g(t)] = pF(p)G(p) \tag{3-94}$$

证明 设 $h(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$，从而知 $h(0)=0$，于是，按性质 3.21 微商的变换定理知

$$L\left[\frac{d}{dt}(f(t) * g(t))\right] = L\left[\frac{d}{dt}h(t)\right] = pL[h(t)] - h(0)$$

$$= pL[f(t) * g(t)] = pF(p)G(p)$$

鉴于 $h'(t)=f(0)g(t)+\int_0^t \frac{\partial f(t-\tau)}{\partial t}g(\tau)d\tau$，代入(3-94)得

$$L^{-1}\{pL[f(t)]L[g(t)]\} = f(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)\frac{\partial f(t-\tau)}{\partial t}d\tau \tag{3-95}$$

(3-95)式便是著名的特阿梅尔公式.

根据上述诸性质，一般来说，已知初始函数，求其拉氏变换，困难不会太大.即使很难求其拉氏变换的初始函数，我们也可以查表求之.下面再举几个例题说明如何灵活运用上述性质，求其拉氏变换.

例 3.21 计算 $L^{-1}[e^{-ap}F(p)]$

解 因为 $e^{-ap}=e^{-ap}\cdot 1=e^{-ap}L[\delta(t)]$，$F(p)=L[f(t)]$，所以

$$L^{-1}[e^{-ap}F(p)] = L^{-1}\{e^{-ap}L[\delta(t)]L[f(t)]\}$$

$$= \delta(t-a) * f(t)$$

当 $0\leqslant a\leqslant t$ 时

$$\delta(t-a) * f(t) = \int_0^t \delta(\tau-a)f(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^0 \delta(\tau-a)f(t-\tau)d\tau + \int_0^t \delta(\tau-a)f(t-\tau)d\tau$$

$$+\int_{t}^{+\infty}\delta(\tau-a)f(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-a)f(t-\tau)d\tau=f(t-a)$$

当 $t<a$ 时，$\delta(t-a)*f(t)=0$，于是

$$L^{-1}[e^{-ap}F(p)]=\begin{cases}f(t-a) & 当\quad 0\leqslant a\leqslant t\text{ 时}\\ 0 & 当\quad t<a\text{ 时}\end{cases}$$

例 3.22 若 $f(t)=\begin{cases}3 & 0<t<2\\ -1 & 2<t<4,\\ 0 & t\geqslant 4\end{cases}$ 求 $L[f(t)]$.

解 根据所给函数，有

$$L[f(t)]=\int_0^2 f(t)e^{-pt}dt+\int_2^4 f(t)e^{-pt}dt+\int_4^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$$

$$=\int_0^2 3e^{-pt}dt+\int_2^4(-1)e^{-pt}dt+\int_4^{+\infty}0\cdot e^{-pt}dt$$

$$=3\left(\frac{e^{-pt}}{-p}\right)\bigg|_0^2-\left(\frac{e^{-pt}}{-p}\right)\bigg|_2^4+0=\frac{3(1-e^{-2p})}{p}+\frac{e^{-4p}-e^{-2p}}{p}$$

$$=\frac{1}{p}(3-4e^{-2p}+e^{-4p})$$

例 3.23 已知 $L[\delta(t)]=1$，求 (a) $L[\delta(t-t_0)]$；(b) $L[\delta'(t)]$.

解 根据(3-90)式及 δ-函数的运算性质有

$$(a)\quad L[\delta(t-t_0)]=\int_0^{+\infty}\delta(t-t_0)e^{-pt}dt$$

$$=e^{-pt_0}L[\delta(t)]=e^{-pt_0}\tag{3-96}$$

再根据性质 3.21 拉氏变换的微商定理有

(b) $L[\delta'(t)]=pL[\delta(t)]-\delta(0)$

由性质 3.21 的注解可知 $\delta(t)$ 于 $t=0$ 处是不连续的，所以 $\delta(0)=\delta(0+0)=0$，又 $L[\delta(t)]=1$，于是，得

$$L[\delta'(t)]=p\tag{3-97}$$

3.2.4 拉氏逆变换的求法

在实际应用中，常常遇到已知象函数求初始函数的问题.(3-77)

式就是这一问题的一般公式. 由于右端积分是一个复变函数的积分，计算这样的积分是比较困难的. 但是，当其象函数 $F(p)$ 满足一定条件时，我们可以提供如下两种求法：

1. 留数法. 也就是可以用留数的方法来计算(3-77)式右端的积分，亦即有

定理 3.4 若 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是象函数 $F(p)$ 的所有奇点（适当选取 r 使这些奇点全在 $\mathrm{Re}(p)<r$ 的范围内），且当 $p\to+\infty$ 时，$F(p)\to 0$，则有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}[F(p)e^{pt}]\quad(t>0)\tag{3-98}$$

证明 如图 3-3 所示，闭曲线 $C=L+C_R$，C_R 是在 $\mathrm{Re}(p)<r$ 的区域内半径为 R 的圆弧，当 R 充分大后，可以使 $F(p)$ 的全部奇点包含在闭曲线 C 围成的区域内. 同时，e^{pt} 在全平面上解析，故 $F(p)e^{pt}$ 的奇点就是 $F(p)$ 的奇点. 由复变函数论中的留数定理可得

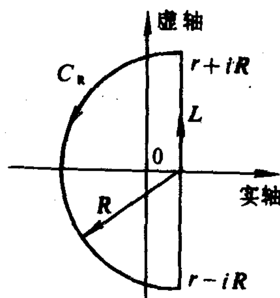


图 3-3

$$\oint_C F(p)e^{pt}dp=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}[F(p)e^{pt}]$$

即

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{r-iR}^{r+iR}F(p)e^{pt}dp+\int_{C_R}F(p)e^{pt}dp\right]=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}[F(p)e^{pt}]$$

于上式左端，取 $R\to+\infty$ 时的极限，并根据复变函数论中的约当引理，当 $t>0$ 时，有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}F(p)e^{pt}dp=0$$

从而，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}[F(p)e^{pt}]\qquad(t>0)$$

这就证明了该定理.

特别是当象函数 $F(p)$ 为有理函数时，即设 $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$，并且 $A(p)$、$B(p)$ 是互质的多项式，$A(p)$ 的次数低于 $B(p)$ 的次数，则由 $B(p)$ 的根的情况不同，而有两个计算公式：

(1)若 n 次多项式 $B(p)$ 的 n 个根 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 都是单根时，则有

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{A(p)}{B(p)}\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t} \tag{3-99}$$

这个公式易于证明，由留数的计算方法，得

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\lim_{p\to p_k}\left\{\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}(p-p_k)\right\}=\sum_{k=1}^{n}\lim_{p\to p_k}\left\{\frac{A(p)}{\dfrac{B(p)-B(p_k)}{p-p_k}}e^{pt}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}$$

(2)若 p_1 是 $B(p)$ 的一个 m 阶零点，$p_{m+1},p_{m+2},\cdots,p_n$ 是 $B(p)$ 的单零点，即 p_1 是 $\dfrac{A(p)}{B(p)}$ 的 m 阶极点，$p_i(i=m+1,m+2,\cdots,n)$ 是它的单极点，由留数的计算方法，知

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{A(p)}{B(p)}\right]=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}+$$

$$+\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{(m-1)}}{dp^{(m-1)}}\left[(p-p_1)\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right]\quad (t>0) \tag{3-100}$$

(3-100)的证明涉及的知识面较广，这里不予以证明.(3-99)、(3-100)二式都称为海维赛(Heaviside)展开公式.这两个公式在用拉氏变换解微分方程时，要经常用到.

例 3.24 已知 $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)^2}$，求它的初始函数 $f(t)$.

解 因为 $B(p)=p(p-1)^2$，所以，$p=0$ 是 $B(p)$ 的单根，$p=1$ 是二阶极点，于是，由(3-100)式可得

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{p(p-1)^2}\right]=\frac{1}{p(p-1)^2}e^{pt}\Big|_{p=0}$$

$$+\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[(p-1)^2\frac{1}{p(p-1)^2}e^{pt}\right]$$

$$=1+\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p}e^{pt}\right]=1+\lim_{p\to 1}\left[\frac{t}{p}e^{pt}-\frac{1}{p^2}e^{pt}\right]$$

$$=1+e^t(t-1) \qquad (t>0)$$

例 3.25 已知 $F(p)=p+5+\frac{1}{p^2+4}$，求初始函数 $f(t)$.

解 由拉氏变换性质 3.26，可得

$$f(t)=L^{-1}[F(p)]=L^{-1}[p]+L^{-1}[5]+L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+2^2}\right]$$

$$=\delta'(t)+5\delta(t)+\frac{1}{2}\sin 2t$$

其中右端第一项用到(3-97)式，第二项用到(3-82)式，第三项用到例 3.14 的(d)的结果.

2. 部分分式法. 这个方法也针对象函数 $F(p)$ 是有理分式的形式而言的. 因为 $F(p)$ 是有理分式，就能通过部分分式的方法，将其分解为若干个简单的易于看出其象原函数的(特别是分子为常数的)分式之代数和. 再根据拉氏变换的性质 3.20，即拉氏逆变换的线性性质，就可以求出各初始函数，这些初始函数的代数和便是 $F(p)$ 的初始函数. 下面通过具体例子说明该方法.

例 3.26 已知 $F(p)=\frac{p}{p+2}$，求初始函数 $f(t)$.

解 容易看出其分解式子，就不一定按部分分式的步骤去作了. 如 $F(p)=\frac{p}{p+2}$，显然能看出它可以分解为

$$F(p)=1-\frac{2}{p+2}$$

而对后一项来说 $p=-2$ 又是一阶极点. 所以，有

$$f(t)=L^{-1}[1]-L^{-1}\left[\frac{2}{p+2}\right]=\delta(t)-\left[\frac{2}{(p+2)'}e^{pt}\right]\bigg|_{p=-2}$$

$$=\delta(t)-2e^{-2t}$$

例 3.27 设 $F(p)=\frac{2p^2-4}{(p-2)(p+1)(p-3)}$，求它的初始函数 $f(t)$.

解 设 $\frac{2p^2-4}{(p-2)(p+1)(p-3)}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p-3}$，为了确定待定系数 A、B、C，将上式右端通分，得

$$2p^2-4=A(p+1)(p-3)+B(p-2)(p-3)$$
$$+C(p-2)(p+1)$$

这是一个恒等式，对于一切 p 值都成立，所以，相继令 $p=2$、3、-1. 解得 $A=-\frac{4}{3}$，$B=-\frac{1}{6}$，$C=\frac{7}{2}$，于是

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{2p^2-4}{(p-2)(p+1)(p-3)}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{-4/3}{p-2}\right]+L^{-1}\left[\frac{-1/6}{p+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{7/2}{p-3}\right]$$

$$=-\frac{4}{3}e^{2t}-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{7}{2}e^{3t}$$

例 3.28　设 $F(p)=\frac{p^3+5p^2+9p+7}{(p+1)(p+2)}$，求其初始函数 $f(t)$.

解　这是一个假分式，首先将其变为整式再加一个真分式，即

$$\frac{p^3+5p^2+9p+7}{(p+1)(p+2)}=p+2+\frac{2}{p+2}+\frac{1}{p+1}$$

两端取逆变换，得

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{p^3+5p^2+9p+7}{(p+1)(p+2)}\right]$$

$$=L^{-1}[p]+L^{-1}[2]+L^{-1}\left[\frac{2}{p+2}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]$$

$$=\delta'(t)+2\delta(t)+2e^{-2t}+e^{-t}$$

例 3.29　求 $L^{-1}\left[\frac{p^3+8p^2+26p+22}{p^3+7p^2+14p+8}\right]$

解　将所给之象函数的分子分母进行因式分解，得

$$L^{-1}\left[\frac{p^3+8p^2+26p+22}{p^3+7p^2+14p+8}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{(p+1)(p+2)(p+4)+p^2+12p+14}{(p+1)(p+2)(p+4)}\right]$$

$$=L^{-1}\left[1+\frac{p^2+12p+14}{(p+1)(p+2)(p+4)}\right]$$

$$=L^{-1}\left[1+\frac{1}{p+1}+\frac{3}{p+2}-\frac{3}{p+4}\right]$$

$$=L^{-1}[1]+L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{3}{p+2}\right]-L^{-1}\left[\frac{3}{p+4}\right]$$

$$=\delta(t)+e^{-t}+3e^{-2t}-3e^{-4t}$$

除了上述两种求初始函数的方法外，还有查表法.

这里要特别指出的，同样的题目，可用不同的方法去求解. 如求 $F(p)=\dfrac{p+1}{9p^2+6p+5}$ 的初始函数，一般地要用部分分式法来解，其实，用配方法也可解，即

$$F(p)=\frac{p+1}{9p^2+6p+5}=\frac{1}{9}\frac{p+1}{(p+\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}$$

$$=\frac{1}{9}\frac{p+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{(p+\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}$$

$$=\frac{1}{9}\left[\frac{p+\frac{1}{3}}{(p+\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}+\frac{\frac{2}{3}}{(p+\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}\right]$$

于是，很容易地看出初始函数为

$$f(t)=L^{-1}[F(p)]=\frac{1}{9}e^{-(1/3)t}\cos\frac{2}{3}t$$

$$+\frac{1}{9}e^{-(1/3)t}\sin\frac{2}{3}t$$

另如 $F(p)=\dfrac{p+2}{(p^2+4p+5)^2}$ 要用查表法，在查表之前也要变形为便于查表的形式，即

$$F(p)=\frac{p+2}{[(p+2)^2+1]^2}$$

查表里 $F_1(p)=\dfrac{p}{(p^2+a^2)^2}$ 的初始函数 $f(t)=\dfrac{t}{2a}\sin at$ 还不是要求者，还必须考虑 $F_1(p)$ 再延迟 $p_0=-2$ 才是 $F(p)$，所以，根据(3-91)式拉氏变换的位移性质得

$$f(t)=\frac{1}{2}te^{-2t}\sin t$$

因此，无论使用什么方法，都必须熟知拉氏变换的性质.

3.2.5 多元函数的拉氏变换

和傅氏变换一样，拉氏变换也容易推广到多元函数的理论中去．并且，二元、三元、四元函数的拉氏变换．在实际应用中是常碰到的．因此，我们的讨论，还是先介绍二元函数的拉氏变换，然后相类似地推广到三元、四元以及多元函数的拉氏变换．

我们考虑定义于区域 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 上的函数 $f(x,y)$，并令

$$g_0(x) = f(x,0); g_1(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$h_0(y) = f(0,y); h_1(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0}$$

函数 $f(x,y)$关于变数 y 的拉氏变换用 $\bar{f}(x,p_2)$表示，即

$$\bar{f}(x,p_2) = \int_0^{+\infty} f(x,y)e^{-p_2 y}dy$$

而关于 x 的拉氏变换用 $F(p_1,y)$代表，即

$$F(p_1,y) = \int_0^{+\infty} f(x,y)e^{-p_1 x}dx$$

二维拉氏变换记为 $F(p_1,p_2)$，即

$$F(p_1,p_2) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)e^{-(p_1 x+p_2 y)}dxdy \qquad (3\text{-}101)$$

假定 p_1 与 p_2 具有相当大的实数部分，以保证(3-101)式右端积分的收敛性．这时我们称(3-101)式为二元函数 $f(x,y)$的拉氏变换．$f(x,y)$称为象原函数，$F(p_1,p_2)$称为象函数．并且，当 $f(x,y)$满足一定条件时，有如下偏微商的性质，即

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}e^{-(p_1 x+p_2 y)}dxdy = pF(p_1,p_2) - G_0(p_1) \qquad (3\text{-}102)$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}e^{-(p_1 x+p_2 y)}dxdy = p^2F(p_1,p_2) - pG_0(p_1) - G_1(p_1) \qquad (3\text{-}103)$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}e^{-(p_1 x+p_2 y)}dxdy = p_1F(p_1,p_2) - H_0(p_2) \qquad (3\text{-}104)$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}e^{-(p_1x+p_2y)}dxdy = p_1^2F(p_1,p_2) - p_1H_0(p_2) - H_1(p_2)$$

(3-105)

其中 $G_0(p_1)=L[g_0(x)]$，$G_1(p_1)=L[g_1(x)]$，$H_0(p_2)=L[h_0(x)]$，$H_1(p_2)=L[h_1(y)]$.

并且，由(3-101)式若知道象函数 $F(p_1,p_2)$ 求 $f(x,y)$. 在假定拉氏逆变换存在的条件下，可以形式地推出反演公式为

$$f(x,y) = L^{-1}[F(p_1,p_2)]$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{r_2-i\infty}^{r_2+i\infty}dp_2\int_{r_1-i\infty}^{r_1+i\infty}F(p_1,p_2)e^{-(p_1x+p_2y)}dp_1 \qquad (3\text{-}106)$$

其中 $r_1=\mathrm{Re}(p_1)$，$r_2=\mathrm{Re}(p_2)$，$-\pi<\arg p_2<\pi$，$-\pi<\arg p_1<\pi$，只须假设 $F(p_1,p_2)$ 于某半平面 $\mathrm{Re}(p_1)>a_1$，$\mathrm{Re}(p_2)>a_2$ 内是有界的，这里固然提到了 $F(p_1,p_2)$ 应该满足的一些条件，其实，我们在推导(3-101)至(3-106)诸式中，都是纯形式地推导. 而今后的任务是，按上述诸公式算出的结果，只要验证满足要求就可以了. 而这些条件由于比较复杂，一般不去讨论，特别是工程技术人员在运用这些公式时，更是如此. 因此，这里我们也不赘述了.

根据二元函数拉氏变换的公式(3-101)，不难类似地写出三元、四元，…，n 元函数的拉氏变换如下

$$L[f(x,y,z)] = F(p_1,p_2,p_3)$$
$$= \iiint_0^{+\infty} f(x,y,z)e^{-(p_1x+p_2y+p_3z)}dxdydz \qquad (3\text{-}107)$$

$$L[f(x,y,z,t)] = F(p_1,p_2,p_3,p_4)$$
$$= \iiiint_0^{+\infty} f(x,y,z,t)e^{-(p_1x+p_2y+p_3z+p_4t)}dxdydzdt$$

(3-108)

一般地，n 元函数的拉氏变换为

$$L[f(x_1,x_2,\cdots,x_n)] = F(p_1,p_2,\cdots,p_n) =$$
$$= \iint\cdots\int_0^{+\infty} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)e^{-(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)}dx_1dx_2\cdots dx_n \qquad (3\text{-}109)$$

仿公式(3-106)也可以类似地写出(3-107)、(3-108)和(3-109)诸式

的逆拉氏变换公式，这里从略.

3.2.6 拉氏变换法的应用举例

拉氏变换法有着极为广泛的应用，下面仅从四个方面通过具体例题说明之.

(1)在物理问题中的应用. 许多物理问题的数学模型往往归结为带初始条件的线性微分方程. 要求它的解，拉氏变换法是特别有效的.

例 3.30 设图 3-4 的机械系统，最初是静止的，在单位冲击力 $\delta(t)$作用下开始运动，不计阻尼，试求运动方程.

解 由牛顿第二定律，得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=\delta(t)\qquad(t\geqslant 0)$$

初始条件为 $x(0)=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$. 对于该二阶常微分方程，两端对 t 取拉氏变换得

$$mp^2X(p)+kX(p)=1$$

其中 $X(p)=\int_0^{+\infty}x(t)e^{-pt}dt$，解关于 $X(p)$的代数方程得

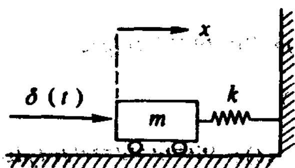


图 3-4

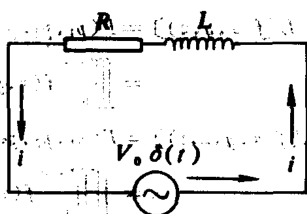


图 3-5

$$X(p)=\frac{1}{mp^2+k}=\frac{1}{\sqrt{mk}}\frac{\sqrt{k/m}}{p^2+(\sqrt{k/m})^2}$$

再取拉氏逆变换，有

$$x(t)=L^{-1}[X(p)]=\frac{1}{\sqrt{mk}}\sin\sqrt{k/m}\,t$$

这就是所求的机械系统的运动方程. 并且,易见它是以$\frac{1}{\sqrt{mk}}$为振幅的简谐运动.

假如我们不在$t\geqslant 0$的时间范围内,而改在$t>0$时建立微分方程时,那么,方程与初始条件都有改变,即变为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0\qquad(t>0)$$

初始条件为$x(0)=0, x'(0+0)=\frac{1}{m}$. 这是因为我们认为冲击力$\delta(t)$已经作用过了,它在$t=0$时,使物体初速度突然由0增加到$\frac{1}{m}$,解这个微分方程得到的运动规律与上面解得的运动规律完全相同.

例 3.31 如图 3-5 的电路,其中电源在$t=0$时输入一个脉冲电压为$V_0\delta(t)$,试求电流i的表达式.

解 由物理中电学的基尔霍夫第二定律建立微分方程为

$$L\frac{di}{dt}+Ri=V_0\delta(t)$$

其中L为电感,R为电阻,初始条件为$i(0)=0$. 方程两端取拉氏变换得

$$LpI(p)+RI(p)=V_0$$

其中$I(p)=\int_0^{+\infty}i(t)e^{-pt}dt$. 解上面关于$I(p)$的代数方程,得

$$I(p)=\frac{V_0}{Lp+R}=\frac{V_0}{L(p+R/L)}$$

再取拉氏逆变换,便得该问题的解为

$$i(t)=\frac{V_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

下面我们再介绍一个求解限定源扩散问题的偏微分方程定解问题. 在半导体扩散工艺中,硼、磷是慢扩散的,由于杂质扩散深度远远小于硅片的厚度,所以,讨论杂质穿过硅片的一面向里扩散时,可以

不考虑另一面的存在.虽然硅片是非常薄的.但还是把它看成是无限厚的.这样就把硅片的内部当做半无界空间.所谓限定源扩散,就是只让硅片表面层上已有的杂质向硅片内部扩散,不让新的杂质穿过硅片表面进入硅片.这类问题便是半无界空间 $x>0$ 中的定解问题.即

例 3.32 求定解问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x} & (x > 0, t > 0) \\
\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 & \\
u(x,0) = \varphi_0 \delta(x - 0) & (x > 0)
\end{cases}
$$

的解.其中 φ_0 是每单位面积硅片表层原有杂质的总量.

解 延拓到全空间得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\
u|_{t=0} = 2\varphi_0 \delta(x) &
\end{cases}
$$

其中偶延拓为

$$
u(x,0) = \begin{cases}
\varphi_0 \delta(x - 0) & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \\
\varphi_0 \delta(x + 0) & \text{当 } x < 0 \text{ 时}
\end{cases}
$$

以 t 为变量,x 为参量,对泛定方程作拉氏变换得

$$
pU - \varphi_0 \delta(x) - a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} = 0
$$

其中 $U=\int_0^{+\infty} u(t)e^{-pt}dt$.这是一个关于 x 的二阶非齐次常微分方程.改写为

$$
\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U = -\frac{2}{a^2} \varphi_0 \delta(x)
$$

设 U_2、U_1 分别为该方程的一个特解和所对应的齐次方程的通解.则由常微分方程理论可知

$$
U_1 = A e^{\frac{p^{1/2}}{a} x} + B e^{-\frac{p^{1/2}}{a} x}
$$

$\sqrt{p}$ 取其某一分支,若为复数时取 $\mathrm{Re}\sqrt{p} > 0$.

根据参数变易法，可得特解为

$$U_2=-e^{\frac{p^{1/2}}{a}x}\int_{\alpha}^{x}\frac{\varphi_0}{a\sqrt{p}}e^{-\frac{p^{1/2}}{a}\xi}\delta(\xi)d\xi$$

$$+e^{-\frac{p^{1/2}}{a}x}\int_{\beta}^{x}\frac{\varphi_0}{a\sqrt{p}}e^{\frac{p^{1/2}}{a}\xi}\delta(\xi)d\xi$$

其中 $-\infty<\alpha<\beta<x<+\infty$. 值得注意的是上述积分变量 ξ 是否在 (α,x) 及 (β,x) 之内暂不知道，这里也是形式地运算结果. 于是，常微分方程的通解为

$$U=U_1+U_2=Ae^{\frac{p^{1/2}}{a}x}+Be^{-\frac{p^{1/2}}{a}x}$$

$$-e^{\frac{p^{1/2}}{a}x}\int_{\alpha}^{x}\frac{\varphi_0}{a\sqrt{p}}e^{-\frac{p^{1/2}}{a}\xi}\delta(\xi)d\xi$$

$$+e^{-\frac{p^{1/2}}{a}x}\int_{\beta}^{x}\frac{\varphi_0}{a\sqrt{p}}e^{\frac{p^{1/2}}{a}\xi}\delta(\xi)d\xi$$

因为，由题意知当 $x\to\infty$ 时，U 必须有界，即当 $x\to+\infty$ 时，U 有界，必须取 $A=0$ 及 $\alpha\to+\infty$. 当 $x\to-\infty$ 时，为了保证 U 有界，必须取 $B=0$ 及 $\beta\to-\infty$. 于是，当 $x\to\infty$ 时有

$$U=-e^{\frac{p^{1/2}}{a}x}\int_{+\infty}^{x}\frac{\varphi_0}{a\sqrt{p}}e^{-\frac{p^{1/2}}{a}\xi}\delta(\xi)d\xi$$

$$+e^{-\frac{p^{1/2}}{a}x}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi_0}{a\sqrt{p}}e^{\frac{p^{1/2}}{a}\xi}\delta(\xi)d\xi$$

$$=e^{\frac{p^{1/2}}{a}x}\int_{x}^{+\infty}\frac{\varphi_0}{a\sqrt{p}}e^{-\frac{p^{1/2}}{a}\xi}\delta(\xi)d\xi$$

$$+e^{-\frac{p^{1/2}}{a}x}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi_0}{a\sqrt{p}}e^{\frac{p^{1/2}}{a}\xi}\delta(\xi)d\xi$$

$$=\int_{x}^{+\infty}\frac{\varphi_0}{a\sqrt{p}}e^{-\frac{p^{1/2}}{a}(\xi-x)}\delta(\xi)d\xi$$

$$+\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi_0}{a\sqrt{p}}e^{-\frac{p^{1/2}}{a}(\xi-x)}\delta(\xi)d\xi$$

再由 δ-函数的运算性质知

$$U=\begin{cases}\dfrac{\varphi_0}{a\sqrt{p}}e^{-\frac{p^{1/2}}{a}x} & \text{当 } x>0 \text{ 时}\\ \dfrac{\varphi_0}{a\sqrt{p}}e^{\frac{p^{1/2}}{a}x} & \text{当 } x<0 \text{ 时}\end{cases}$$

为了求定解问题的解，需要求 U 的拉氏逆变换，因为 $U(p)=\varphi_0 e^{(p^{-1/2}/a)x}/a\sqrt{p}$ $(x>0)$是多值函数，$p=0$ 是支点，因此，不能简单地使用求留数方法，而需要如图 3-6 那样，将沿 $L(\mathrm{Re}(p)=b>0)$的积分分解为沿 C_R，BC，C_r，$B'C'$及 $C_{R'}$，$C_{r'}$等 6 条曲线的积分和，值得庆幸的是，通过复变函数理论可以证明(此处省略)沿曲线 C_R、$C_{R'}$、C_r、$C_{r'}$的积分，当 $x\to\infty$时，均趋于零. 而沿$\overline{BC}$和$\overline{B'C'}$的积分分别考虑如下：

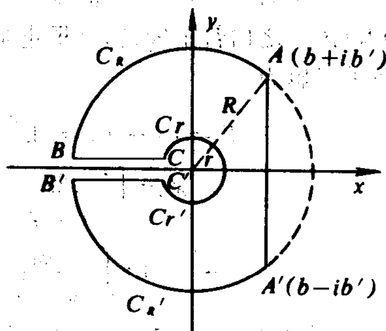


图 3－6

在$\overline{BC}$上，设 $p=-\lambda_x$，$|p|=\lambda_x$，$\arg p=\pi$，即 $\sqrt{p}=i\sqrt{\lambda_x}$. 于是

$$\int_{\overline{BC}}=-\frac{\varphi_0}{a}\int_R^r\frac{e^{-\frac{x}{a}(i\sqrt{\lambda_x})}}{i\sqrt{\lambda_x}}e^{-\lambda_x t}(-d\lambda_x)$$

$$=-\frac{\varphi_0}{a}i\int_r^R\frac{e^{-\frac{ix}{a}\sqrt{\lambda_x}}}{\sqrt{\lambda_x}}e^{-\lambda_x t}d\lambda_x$$

在$\overline{B'C'}$上，设 $p=-\lambda_x$，$\arg p=-\pi$，$\sqrt{p}=-i\sqrt{\lambda_x}$，于是

$$\int_{\overline{B'C'}}=\frac{\varphi_0}{a}\int_r^R\frac{e^{-\frac{x}{a}(i\sqrt{\lambda_x})}}{i\sqrt{\lambda_x}}e^{-\lambda_x t}(-d\lambda_x)$$

$$=-\frac{\varphi_0}{a}i\int_r^R\frac{e^{\frac{ix}{a}\sqrt{\lambda_x}}}{\sqrt{\lambda_x}}e^{-\lambda_x t}d\lambda_x$$

从而

$$\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{B'C'}}=-\frac{2\varphi_0}{a}i\int_r^R\frac{\cos\frac{x}{a}\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}}e^{-\lambda_2 t}d\lambda_2 \xlongequal{\text{令}\sqrt{\lambda_2}=s}$$

$$=-\frac{2\varphi_0}{a}i\int_{r^{1/2}}^{R^{1/2}}\frac{\cos\frac{x}{a}s}{s}e^{-s^2t}2sds$$

$$=-\frac{4\varphi_0}{a}i\int_{r^{1/2}}^{R^{1/2}}e^{-s^2t}\cos\frac{sx}{a}ds$$

所以,当 $R\to+\infty,r\to0$ 时,有

$$\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{B'C'}}=-\frac{4\varphi_0}{a}i\int_0^{+\infty}e^{-s^2t}\cos\frac{sx}{a}ds=-\frac{2\varphi_0 i\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-x^2/4a^2t}$$

这就是说,我们取 $U(p)$ 的逆变换时,有

$$u(x,t)=L^{-1}[U(p)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{\varphi_0}{a}\frac{e^{-\frac{p^{1/2}}{a}x}}{\sqrt{p}}e^{pt}dp$$

$$=\frac{2\varphi_0\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{x^2/4a^2t}i\cdot\frac{1}{2\pi i}$$

$$=\frac{\varphi_0}{a\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4a^2t}$$

(2)一般微分方程的拉氏变换解法. 用拉氏变换法解微分方程,其实质是暂不去求它的解,而是先取拉氏变换. 其目的是将常微分方程转化为代数方程(若是偏微分方程则先转化为常微分方程的定解问题),使之降低问题的难度,以便简化其运算. 经过解代数方程(或常微分方程)求得象函数,再取拉氏逆变换,最后求得象原函数,得到微分方程的解. 下面我们再通过两个例题加以说明.

例 3.33 质点 M 作直线振动,恢复力与位移成比例,为了方便,设比例常数为 $m\omega^2$. 在时刻 $t_k=k\tau(k=0,1,2,\cdots)$ 时,该质点受到大小为 a 的冲击力作用. 设初始位移与初速度都为 0,并设 τ 不是 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的整数倍,若不计阻尼,求该点的运动方程 $x=x(t)$.

解 在 k 的每一个值,质点受到的冲击力为 $a\delta(t-k\tau)$,所以,M

点作直线振动时，受力的总和为 $a\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-k\tau)$，于是，由牛顿第二定律建立方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\omega^2x=a\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-k\tau)$$

其中初始条件为 $x(0)=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0.$

对方程两端取拉氏变换得

$$mp^2X(p)+m\omega^2X(p)=a\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\tau p}$$

这里 $X(p)=\int_0^{+\infty}x(t)e^{-pt}dt$，而等式右端的拉氏变换，根据拉氏变换的线性性及位移性质得

$$a\sum_{k=0}^{\infty}L[\delta(t-k\tau)]=a\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\tau p}$$

而

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\tau p}=\frac{1}{1-e^{-\tau p}}$$

于是，解关于 $X(p)$的代数方程得

$$X(p)=\frac{a}{m}\frac{1}{(p^2+\omega^2)(1-e^{-\tau p})}$$

又因为 τ 不是 $\tau_1=\frac{2\pi}{\omega}$ 的整倍数，所以，$X(p)$的极点是 $p=0,p=\pm i\omega,p_n=\frac{2n\pi i}{\tau}$（其中 $n=\pm1,\pm2,\cdots$）并且都是一阶的.

利用留数定理 $\operatorname*{Res}_{z\to a}f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$，并用洛必达法则，求出函数 $X(p)e^{pt}$在这些极点上的所有留数，再由拉氏逆变换 $x(t)=L^{-1}[X(p)]$及欧拉公式便得到

$$x(t)=\frac{a}{m\omega^2}\Big[\frac{1}{\tau}-\omega\cos\omega(t+\frac{\tau}{2})/2\sin\frac{\omega\tau}{2}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\tau}{\tau^2-n^2\tau_1^2}\cos\frac{n\omega\tau_1}{\tau}t\Big]$$

这就是质点 M 的运动方程.

如果微分方程的阶数较高，用拉氏变换法解，其优点更是明显可见.

例 3.34 解 $y^{(4)}+2y^{(2)}+y=\sin t$，其中 $y(0)=1, y'(0)=-2, y''(0)=3, y'''(0)=0$.

解 对给定的微分方程两端取拉氏变换，并利用初始条件，得

$$[p^4Y(p)-p^3(1)-p^2(-2)-p(3)-0]$$

$$+2[p^2Y(p)-p(1)-(-2)]+Y(p)=\frac{1}{p^2+1}$$

将其化简整理为

$$Y(p)=\frac{1}{(p^2+1)^3}+\frac{p^3-2p^2+5p-4}{(p^2+1)^2}$$

$$=\frac{1}{(p^2+1)^3}-\frac{(p^3+p)-2(p^2+1)+(4p-2)}{(p^2+1)^2}$$

$$=\frac{1}{(p^2+1)^3}+\frac{p}{p^2+1}-\frac{2}{p^2+1}+\frac{4p-2}{(p^2+1)^2}$$

已知

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(p^2+1)^3}\right)=\frac{3}{8}\sin t-\frac{3}{8}t\cos t-\frac{1}{8}t^2\sin t$$

$$L^{-1}\left(\frac{4p-2}{(p^2+1)^2}\right)=2t\sin t-\sin t+t\cos t$$

$$L^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)=\cos t$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{p^2+1}\right)=2\sin t$$

所以

$$y(t)=L^{-1}[Y(p)]=(1+\frac{5}{8}t)\cos t$$

$$-\left(\frac{21}{8}-2t+\frac{1}{8}t^2\right)\sin t$$

(3)微分方程组的拉氏变换解法.

例 3.35 用拉氏变换法求微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2x}{dt^2} - x + y + z = 0 \\
x + \dfrac{d^2y}{dt^2} - y + z = 0 \\
x + y + \dfrac{d^2z}{dt^2} - z = 0
\end{cases}
$$

当初始条件为 $x(0)=1, y(0)=z(0)=x'(0)=y'(0)=z'(0)=0$ 时的解.

解 设 $L[x(t)]=X(p), L[y(t)]=Y(p), L[z(t)]=Z(p)$，对方程组取拉氏变换得

$$
\begin{cases}
p^2X(p) - pX(0) - X(p) + Y(p) + Z(p) = 0 \\
X(p) + p^2Y(p) - Y(p) + Z(p) = 0 \\
X(p) + Y(p) + p^2Z(p) - Z(p) = 0
\end{cases}
$$

这样就把微分方程组经过取拉氏变换后转化为关于 $X(p)$、$Y(p)$、$Z(p)$的代数方程组，即

$$
\begin{cases}
(p^2 - 1)X(p) + Y(p) + Z(p) = 0 \\
X(p) + (p^2 - 1)Y(p) + Z(p) = 0 \\
X(p) + Y(p) + (p^2 - 1)Z(p) = 0
\end{cases}
$$

解此方程组得

$$
X(p) = \frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-2)}
$$

$$
Y(p) = Z(p) = -\frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}
$$

易见 $X(p)$有 $p_1=\sqrt{2}, p_2=-\sqrt{2}, p_3=i, p_4=-i$ 等 4 个一阶极点，用留数法求其拉氏逆变换为

$$
x(t) = \sum_{k=1}^{4} \underset{p=p_k}{\mathrm{Res}}[X(p)e^{pt}] = \left.\frac{p^3e^{pt}}{(p^2+1)(p+\sqrt{2})}\right|_{p_1}
$$

$$
+ \left.\frac{p^3e^{pt}}{(p^2+1)(p-\sqrt{2})}\right|_{p_2} + \left.\frac{p^3e^{pt}}{(p+i)(p^2-2)}\right|_{p_3}
$$

$$
+ \left.\frac{p^3e^{pt}}{(p-i)(p^2-2)}\right|_{p_4}
$$

$$\frac{2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}}{(2+1)2\sqrt{2}} + \frac{-2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t}}{(2+1)(-2\sqrt{2})} + \frac{(-i)e^{it}}{2i(-3)} + \frac{ie^{-it}}{-2i(-3)}$$

$$= \frac{2}{3}\text{ch}(\sqrt{2}t) + \frac{1}{3}\cos t$$

同理有

$$y(t) = z(t) = -\frac{1}{3}\text{ch}(\sqrt{2}t) + \frac{1}{3}\cos t$$

(4)拉氏变换在线性系统传递函数中的应用.这段内容我们将在第五章里详细叙述,此处从略.

在本章的结尾,有几个需要加以说明的问题:

1° 两种变换在解题中的过程和步骤,原则上是固定格式化了.即无论是那种变换,其解题过程中都要遵循以下四步:

①根据自变量的变化范围及其定解条件的具体情况,选取适当的变换.自变量的变化范围,傅氏变换要求在$(-\infty,+\infty)$内变化;拉氏变换要求在$(0,+\infty)$内变化.* 此外,同时要考虑定解条件的形式,由拉氏变换的微分性质(3-84)式知,要对某个自变量取拉氏变换,必须在定解条件中给出当该自变量为零时的函数值及有关的导数值.

②对定解条件取相应的变换,使之成为新方程的定解条件.

③解关于象函数的方程(代数方程或常微分方程)求出象函数.

④取象函数的逆变换,得到原定解问题的解(即象原函数).取逆变换时,主要方法是依靠积分变换表及积分变换的有关性质.

2° 在积分变换中引入δ-函数,使积分变换法在解微分方程时更加有效.本来积分变换法对于解微分方程是极有用的方法,但是运算时常常会遇到困难,许多非常简单的函数不能进行积分变换或者

---

* 关于拉氏变换,还有一种所谓的双边拉氏变换,其积分区间为$(-\infty,+\infty)$,不过不常用.这里介绍的只是限于经常用的所谓单边拉氏变换.

没有象原函数，如 1 就不能进行傅氏变换，拉氏变换中的象函数 $F(p)=1$ 不存在象原函数. 当引入了 δ-函数之后，就都有意义了，即

$$F[1] = 2\pi\delta(p); \qquad F^{-1}[1] = \delta(x)$$

$$L[\delta(x)] = 1; \qquad L^{-1}[1] = \delta(x)$$

这样，就使得积分变换法如虎添翼.

3° 因篇幅所限以及本书的宗旨的要求，积分变换中的一些内容，例如初值及终值定理、传递函数、求某些广义积分的值等内容，这里都不介绍.

4° 通常积分变换还包括有梅林变换(Mellin-transform)、汉克尔变换(Hankel-tarnsform)，但最常用的还是傅氏变换和拉氏变换，因此，本书关于后两种变换的内容也就不介绍了. 有兴趣的读者可查阅书后参考书.

第四章 解数学物理方程的格林(Green)函数法

δ-函数在数学物理方程的理论及其求解方法中，有着广泛的应用. 本章只讨论诸方法中与 δ-函数的联系极为密切并且具有广泛应用的方法——格林(Green)函数法.

数学物理方程——这里主要涉及三种典型的数学物理方程即热传导方程、波动方程和位势方程(包括拉普拉斯方程与泊松方程)，无论哪种方程，究其根本，无非都是某些物理规律的数学描述.

近代物理主要是研究各种各样的场的变化规律，而数学物理方程，则正是物理上的源与其所产生的场之间的内在联系的数学描述，由于在物理上任意源所产生的场，都可以看成点源所产生的场的迭加. 因此，点源所产生的场的研究是起着基本的重要作用. 而所谓格林函数的物理背景则表明，它是点源所产生的场的数学表示. 因此，通过格林函数的某种数学形式上的迭加，可以研究任意源所产生的物理场的变化规律，这就是所谓格林函数法的实质. 于是，我们也称格林函数为点源函数，称格林函数法为点源函数法. 鉴于格林函数所起的基本作用，人们又称它为基本解.

由此可见，格林函数法，其实也是从局部分析过渡到总体结果的一种类似于古典分析中的"微元法"的一种方法. 因此，它不仅物理意义相当鲜明，而且使用起来又相当灵活方便. 此外，通过这种方法所得到的结果，在数学形式上往往非常简洁，从而既利于应用，也便于理论分析.

对格林函数法的论述，习惯上是采取描述稳定过程的定解问题与非稳定过程的定解问题，分头独立叙述的方式，而不注意去沟通它们之间的联系，这样就使得方法所涉及的范围，也往往比较窄，来龙

去脉也常常交待得不够深透.这就势必影响人们对格林函数法这样一个有着广泛应用,而又行之有效的方法的理解、掌握和运用.为了进一步说明 δ-函数在格林函数法中的重要应用,本章将介绍一种对三类典型数学物理方程的格林函数加以统一引进的方法.它不仅进一步揭示了格林函数法和 δ-函数的内在联系,从而认识 δ-函数在格林函数法中的重要作用,而且便于读者对这种方法的掌握和应用.

§4.1 初值问题的Green函数与Green函数法

4.1.1 热传导方程初值问题的Green函数与Green函数法

一、格林函数的引进

我们以一维问题为例,来阐明热传导方程初值问题的格林函数的引进,考虑

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

按迭加原理可知,为了求定解问题(A),只须求解定解问题

$$(B)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) & (4\text{-}1) \\ u_1\big|_{t=0} = \varphi(t) & (-\infty < x < +\infty) & (4\text{-}2) \end{cases}$$

与定解问题

$$(C)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(x,t) & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u_2\big|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

并且

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) \tag{4-3}$$

首先利用傅氏变换,求定解问题(B)的解.为此,于方程(4-1)和初值条件(4-2)两端对 x 取傅氏变换,并记为

$$\bar{u}_1(\lambda,t) = F[u_1(x,t)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} u_1(x,t)dx, \quad \tilde{\varphi}(\lambda) = F[\varphi(x)]$$

则得

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{u}_1}{dt} = -a^2\lambda^2\tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_1\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\lambda) \end{cases}$$

解此常微分方程的初值问题，得

$$\tilde{u}_1(\lambda,t) = \tilde{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}$$

再对 $\tilde{u}(\lambda,t)$ 取傅氏逆变换，并利用关系式

$$F[e^{-b^2x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{b}e^{-\lambda^2/4b^2} \quad (b>0)$$

以及傅氏变换的褶积公式，便得定解问题(B)的解为

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= F^{-1}[\tilde{u}_1(\lambda,t)] = F^{-1}[\tilde{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}] \\ &= F^{-1}\left\{F[\varphi(x)]F\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4a^2t}\right]\right\} \\ &= \varphi(x) * \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4a^2t}\right) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}d\xi \end{aligned} \tag{4-4}$$

根据第二章 § 2.3 所述之杜哈美原理及该节定理 2.2 的说明，为了求解定解问题(C)，只须先求解定解问题

$$(D)\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty, t>\tau>0) \\ v\big|_{t=\tau} = f(x,\tau) & (-\infty<x<+\infty) \end{cases}$$

的解 $v=v(x,t,\tau)$，并且

$$u_2(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)d\tau \tag{4-5}$$

仿定解问题(B)的解法，不难求得定解问题(D)之解为

$$v(x,t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}d\xi$$

再按(4-5)，定解问题(C)的解为

$$u_2(x,t)=\int_0^t \frac{d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau)e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}d\xi \quad (4\text{-}6)$$

由(4-3)、(4-4)、(4-6)可知，所论定解问题(A)的解为

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$$

由此，不难看出，函数

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2t} \quad (4\text{-}7)$$

在求解定解问题(A)时，起着基本的重要的作用. 事实上，为了求解一维热传导方程的初值问题(A)的解，只须将初值函数 $\varphi(\xi)$ 乘以 $G(x,\xi,t)$，将自由项 $f(\xi,\tau)$ 乘以 $G(x,\xi,t-\tau)$，并分别作它们的某种形式的积分之后，再相加即可. 确切地说，即

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi \quad (4\text{-}8)$$

容易证明

$$\frac{\partial G}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \qquad (-\infty<x<+\infty,t>0) \quad (4\text{-}9)$$

也就是说，函数 $G(x,\xi,t)$ 于 $-\infty<x<+\infty,t>0$ 上满足一维齐次热传导方程. 鉴于 $G(x,\xi,t)$ 在求解一般的一维热传导方程的初值问题中，所起的基本作用，因而，称 $G(x,\xi,t)$ 为一维热传导方程初值问题的基本解或格林函数.

显而易见

$$\lim_{t\to 0^+}G(x,\xi,t)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\neq\xi \text{ 时}\\ \infty & \text{当 } x=\xi \text{ 时}\end{cases}$$

然而却不能由此立即得出

$$G(x,\xi,t)\big|_{t=0^+}=\delta(x-\xi) \quad (4\text{-}10)$$

的结论. 这是因为按 δ-函数的定义，(4-10)式成立，尚须证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\lim_{t \to 0^+} G(x,\xi,t)] dx = 1$$

而这点尽管不难证明，因为，当 $t>0$ 时，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t) dx = 1$$

从而有

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t) dx = 1$$

但是，由于上式未必能在积分号下取极限，于是，也就未必能有(4-10)式成立. 然而，由第一章 § 1.2 例 1.3 可知，凯尔文(Kelvin)热源函数

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t}$$

当 $t \to 0^+$ 时的弱极限正是 $\delta(x-\xi)$，即

$$\lim_{t \to 0^+} G(x,\xi,t) \xrightarrow{\text{弱}} \delta(x-\xi)$$

回忆弱收敛的定义，以及第一章 § 1.5 中所述的 δ-函数的运算性质 1.2，不难得知，在此意义下，$G(x,\xi,t)|_{t=0^+}$ 与 $\delta(x-\xi)$ 等效，换言之，对任一于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$，恒有

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) G(x,\xi,t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-\xi) dx = f(\xi)$$

按着弱相等的定义，可知，

$$G(x,\xi,t)|_{t=0^+} = \delta(x-\xi)$$

鉴于 δ-函数已非一般的古典函数，而是广义函数，因此，确切地理解(4-10)式的含意，正应当将其理解为在弱相等意义下的等式.

综上所述，一维热传导方程初值问题的基本解 $G(x,\xi,t)$ 满足

$$(E) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ G|_{t=0} = \delta(x-\xi)^{*} & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

* 正如我们在第二章 § 2.4 中所作的说明，这里 $G|_{t=0}$ 与 $G|_{t=0^+}$ 的意义是等同的.

二、格林函数的物理意义

下面我们来简述一维热传导方程初值问题的格林函数的物理意义. 为此, 我们来考虑于其上存在瞬时点热源的双向无界杆的温度分布. 比如(假定沿着杆的方向于杆上取 ox 轴, 并设指向某侧的方向为正向). 此杆只在点 $x=\xi$ 处受一于时刻 $t=0$ 瞬时起作用的集中热源所提供的热量 Q 的影响, 而在其余点处的温度皆为零, 考察当 $t>0$ 时, 杆上各点的温度分布.

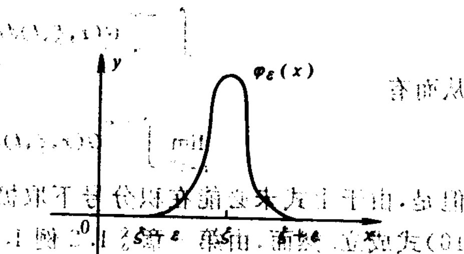


图 4-1

这里所谓集中分布于点 $x=\xi$ 处, 在时刻 $t=0$ 瞬时起作用的瞬时点热源, 乃是只在 $t=0$ 这瞬时起作用(而 $t>0$ 时, 则作用消失)的集中分布于 ξ 点附近, 比如 $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ ($\varepsilon>0$ 为某充分小的正数), 这种瞬时起作用的分布范围非常集中的实际热源的一种"模型化"的近似描述. 因而, 在这种意义下, 若设杆的比热* 为 C, 密度为 ρ, 不妨设 C、ρ 为常数. 则可以认为所假设的条件相当于此瞬时集中热源所提供的热量 Q, 是使得该双向无界杆于时刻 $t=0$ 时, 获一个具有如下属性的初始温度分布函数 $\varphi_\varepsilon(x)$ (如图 4-1).

1° $\varphi_\varepsilon(x)$ 于 $-\infty<x<+\infty$ 上连续

2° $\varphi_\varepsilon(x)>0$, 当 $x\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ 时; $\varphi_\varepsilon(x)=0$, 当 $x\bar{\in}(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ 时

3° $c\rho\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(x)dx=Q$

于是, 若记此无界杆的所求的温度分布函数为 $u_\varepsilon(x,t)$, 则

---

* 单位质量的物质, 升高单位温度所需要的热量, 称为该物质的比热.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon(x,t)}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u_\varepsilon(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_\varepsilon(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

据此及(4-8)有

$$u_\varepsilon(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\varepsilon(\xi) G(x,\xi,t) d\xi \tag{4-11}$$

由于 $G(x,\xi,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}$ 对于任何 $t>0, -\infty<x<+\infty$ 关于 ξ 于 $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ 上连续，而 $\varphi_\varepsilon(\xi)$ 则于 $\xi\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ 上非负连续，于是，由(4-11)式和积分中值定理知，存在 $\xi^*\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$，能使

$$u_\varepsilon(x,t) = G(x,\xi^*,t)\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi$$

若为简便计，设 $c\rho=1$，则由上述 3°可知

$$u_\varepsilon(x,t) = G(x,\xi^*,t)Q \qquad \xi^* \in (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,t) = QG(x,\xi,t)$$

特别当 $Q=1$ 时，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,t) = G(x,\xi,t)$$

这正表明，一维热传导方程初值问题的格林函数(或基本解) $G(x,\xi,t)$ 的物理意义，在于它表征无界杆之仅其有在点 $x=\xi$ 处于 $t=0$ 时，施放单位热量的瞬时点热源情况下的温度分布. 因此，一维热传导方程初值问题的格林函数或基本解也称之为瞬时点源函数或者称为具有瞬时点源的温度分布.

按上述格林函数 $G(x,\xi,t)$ 的物理意义，以及第一章 § 1.3 所指出的 δ-函数的物理意义可知，$G(x,\xi,t)$ 应满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ G\big|_{t=0} = \delta(x-\xi) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

这正是定解问题(E)，于是，格林函数的物理意义，除了它本身具有明显的重要性之外，还从另一侧面证实了 $G(x,\xi,t)$ 应是(E)的解.

三、格林函数的解析求法及其意义

无论是格林函数的运算意义，还是物理意义，都表明一维热传导方程初值问题的格林函数 $G(x,\xi,t)$ 满足定解问题(E)，即

$$(E)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ G\big|_{t=0} = \delta(x-\xi) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

这就给出了一维热传导方程的初值问题的格林函数的解析求法. 事实上，我们可以通过傅氏变换法具体地求出(E)的解，设

$$F[G(x,\xi,t)] = \widetilde{G}(\lambda,\xi,t)$$

并注意到 δ-函数的傅氏变换的结果，分别于(E)的方程及初始条件两端，对 x 取傅氏变换，得：

$$(F)\quad \begin{cases} \dfrac{d\widetilde{G}(\lambda,\xi,t)}{dt} = -a^2\lambda^2\widetilde{G}(\lambda,\xi,t) \\ \widetilde{G}(\lambda,\xi,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\delta(x-\xi)dx = e^{-i\lambda\xi} \end{cases}$$

易见，此常微分方程初值问题的解为

$$\widetilde{G}(\lambda,\xi,t) = e^{-i\lambda\xi}e^{-a^2\lambda^2 t}$$

再对 $\widetilde{G}(\lambda,\xi,t)$ 取傅氏逆变换，利用关系式

$$F[e^{-b^2x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{b}e^{-\lambda^2/4b^2} \quad (b > 0)$$

以及傅氏逆变换的定义，便得

$$G(x,\xi,t) = F^{-1}[\widetilde{G}(\lambda,\xi,t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\left(e^{-i\lambda\xi}\cdot e^{-a^2\lambda^2 t}\right)d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-\xi)}e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} \qquad (4\text{-}12)$$

这正是一维热传导方程初值问题的格林函数.

在本节开头第一个问题中，对于一般的一维热传导方程的初值问题(A)，我们已经用傅氏变换法求出其解的表达式(4-8)，并且指出其格林函数就是(4-12)(见(4-7)式). 我们之所以还要在这里重新阐述它的解析求法，其意义在于：

1° 在定义含高维热传导方程的定解问题，以及其它类型定解

问题的格林函数时，能有所借鉴，例如，我们称

$$
(H)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right) & (-\infty < x,y < +\infty, t > 0) \\ G\big|_{t=0} = \delta(x-\xi, y-\eta) & (-\infty < x,y < +\infty) \end{cases}
$$

的解 $G=G(x,y,\xi,\eta,t)$ 为二维热传导方程的初值问题

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t) & (-\infty < x,y < +\infty, t > 0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x,y) & (-\infty < x,y < +\infty) \end{cases}
$$

的格林函数或基本解. 也称为二维热传导方程初值问题的点源函数；又如，我们称

$$
(K)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right) \\ \qquad\qquad (-\infty < x,y,z < +\infty, t > 0) \\ G\big|_{t=0} = 0, \dfrac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=0} = \delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) \\ \qquad\qquad (-\infty < x,y,z < +\infty) \end{cases}
$$

的解 $G=G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)$ 为三维波动方程初值问题

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t) \\ \qquad\qquad (-\infty < x,y,z < +\infty, t > 0) \\ u\big|_{t=0} = \psi(x,y,z), \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x,y,z) \\ \qquad\qquad (-\infty < x,y,z < +\infty) \end{cases}
$$

的格林函数或基本解. 也称之为三维波动方程初值问题的点源函数等等；

2° 为含高维热传导方程的定解问题，以及其它类型定解问题的格林函数的解析求法提供了依据. 例如，按上述定义，借助于傅氏变换求解定解问题(K)，不难得到三维波动方程初值问题的格林函数为

$$
G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi ar}\delta(r-at)
$$

其中

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

等等；

3° 与本节开头第一个问题中所述求解一维热传导方程初值问题相比较，尽管所用的方法都是傅氏变换法，然而，这里所指出的格林函数的解析求法却十分简捷．追其根源，起关键性的作用，正是在于 δ-函数及其运算性质．于是，通过求格林函数，进而获得一维热传导方程初值问题的解，则是非常便利的．

事实上，为了求定解问题

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

的解，按迭加原理，只须求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u_1\big|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u_2\big|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

并且

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

由 δ-函数的运算性质知

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\delta(x-\xi)d\xi$$

于是，按迭加原理及格林函数的解析求法可知

$$u_1(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} \varphi(\xi) d\xi$$

而根据杜哈美原理可知，为了求 $u_2(x,t)$，只须求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ v\big|_{t=\tau} = f(t,\tau) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

并且

$$u_2(x,t)=\int_0^t v(x,t,\tau)d\tau$$

作变换 $s=t-\tau$，并仿 $u_1(x,t)$ 的求法，不难得到

$$v(x,t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$$

从而

$$u_2(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$$

于是，所求定解问题(A)之解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$$

上述通过先求格林函数(即点源函数)，并利用迭加原理(杜哈美原理实质上也是迭加原理)求得一维热传导方程初值问题的解的方法，称为格林函数法或者称为点源函数法.

求解一维热传导方程初值问题的格林函数法的一个明显的特点就是简便灵活，其原因就在于 δ-函数起了重要的作用. 下面我们再举一例来进一步说明格林函数法.

例 4.1 试用格林函数法求解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-1 & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u|_{t=0}=x^2\end{cases}$$

解 首先，借助于傅氏变换，或者按(4-12)式求得一维热传导方程初值问题的格林函数，即求

$$\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ G|_{t=0}=\delta(x-\xi) & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

的解为

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

其次，为了按格林函数法求原定解问题的解 $u=u(x,t)$，由迭加原理知，只须求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u_1\big|_{t=0} = x^2 & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - 1 \\ u_2\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

并且

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

鉴于

$$x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \delta(x-\xi) d\xi$$

于是，按迭加原理及 $G(x,\xi,t)$ 的求法可知*

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 - x\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{+\infty}^{+\infty} x\xi e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} 2t \int_{-\infty}^{+\infty} \xi d e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{+\infty}^{+\infty} (x\xi - x^2) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{+\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \\ &= (2t + x^2) \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{+\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \end{aligned}$$

* 下面的计算用到了 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

$$+\frac{x}{2\sqrt{\pi t}}\cdot 2t\int_{+\infty}^{+\infty} d e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

$$=2t+x^2$$

而根据杜哈美原理，为了求 $u_2(x,t)$，只须求

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>\tau>0)\\ v|_{t=\tau}=-1 & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

的解 $v=v(x,t,\tau)$，并且

$$u_2(x,t)=\int_0^t v(x,t,\tau)d\tau$$

仿照求 $u_1(x,t)$的方法，求出 $v(x,t,\tau)$可得

$$u_2(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(x-\xi)^2/4(t-\tau)}d\xi$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\xi)^2/4(t-\tau)}d\left(\frac{\xi-x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\cdot\sqrt{\pi}=-t$$

故，所求的解为

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$$

$$=x^2+t$$

后面我们将会看到，上述格林函数法，对于其它类型的定解问题，也具有普遍的指导意义. 并且求解这些类型的定解问题的格林函数法，δ-函数同样都是从中起着重要的作用. 因此，可以说格林函数法是求解各种典型定解问题的简捷灵活、行之有效的一种重要方法.

4.1.2 波动方程初值问题的 Green 函数与 Green 函数法

为确定起见，我们以三维问题

$$
(A)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty,t>0) \\
u\Big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x,y,z) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty)
\end{cases}
$$

为例来简述波动方程初值问题的格林函数的定义及其物理意义；格林函数的解析求法；以及求解波动方程初值问题的格林函数法.

一、格林函数的定义及其物理意义

正如 4.1.1 里第三个问题中所指出的，类似于热传导方程初值问题的格林函数的定义，我们称

$$
(B)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty,t>0) \\
G\Big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=0}=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty)
\end{cases}
$$

的解 $G=G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)$ 为三维波动方程初值问题的格林函数或基本解.

此格林函数的物理意义，完全可以仿照§4.1 中第二段的说明，略加变化便可给出. 不过，下面我们借助于 δ-函数的物理意义，则更可以简便地加以说明. 事实上 (B) 的解——三维波动方程初值问题的格林函数 $G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$，乃是表示在不受外力作用的情况下，开始处于平衡状态，初速为 $\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)$ 的某物体的波的传播. 又由于上述的初速是在外力作用下才获得的，再根据 δ-函数的物理意义，容易得知，$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ 的物理意义，在于它表征了开始时 ($t=0$) 处于平衡状态的上述物体，受到只在瞬时 $t=0$ 时集中作用于其上之点 (ξ,η,ζ) 处的“瞬时集中”外力的作用，所产生的波的传播. 为此，我们也称这个格林函数为三维波动方程初值问题的点源函数.

二、格林函数的解析求法

为了求三维波动方程初值问题的格林函数，我们利用傅氏变换

求解定解问题(B). 设$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$对x,y,z取三维傅氏变换为

$$F[G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)]=\widetilde{G}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\xi,\eta,\zeta)$$

注意到三维δ-函数的傅氏变换的结果,分别于(B)的方程及初始条件两端,对x,y,z取三维傅氏变换便得

$$(C)\quad\begin{cases}\dfrac{d^2\widetilde{G}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\xi,\eta,\zeta,t)}{dt^2}=-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\widetilde{G}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\xi,\eta,\zeta,t)\\ \widetilde{G}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\xi,\eta,\zeta,t)\Big|_{t=0}=0\\ \dfrac{d\widetilde{G}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\xi,\eta,\zeta,t)}{dt}\Bigg|_{t=0}=\displaystyle\iiint_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\lambda_1x+\lambda_2y+\lambda_3z)}\delta(x-\xi,\\ \qquad y-\eta,z-\zeta)dxdydz=e^{-i(\lambda_1\xi+\lambda_2\eta+\lambda_3\zeta)}\end{cases}$$

不难求得常微分方程初值问题(C)的解为

$$\widetilde{G}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{\sin a\rho t}{a\rho}e^{-i(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_3\zeta_3)}$$

其中

$$\rho=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}$$

对$\widetilde{G}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\xi,\eta,\zeta,t)$取三维傅氏变换,便得$(B)$的解为

$$\begin{aligned}&G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\lambda_1x+\lambda_2y+\lambda_3z)}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}e^{-i(\lambda_1\xi+\lambda_2\eta+\lambda_3\zeta)}d\lambda_1d\lambda_2d\lambda_3\\&=\frac{1}{8\pi^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}e^{-i[(\xi-x)\lambda_1+(\eta-y)\lambda_2+(\zeta-z)\lambda_3]}d\lambda_1d\lambda_2d\lambda_3\end{aligned}$$

记成矢量形式

$$\boldsymbol{r}=\{x-\xi,y-\eta,z-\zeta\},\ \boldsymbol{\rho}=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$$

作旋转坐标轴的变换,以使得λ_3轴与$\boldsymbol{r}$指向一致. 由于旋转坐标轴的变换,不改变矢量的内积与模,因此,若记

$$\rho=|\boldsymbol{\rho}|=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}$$

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

且令

$$\begin{cases}\lambda_1=\rho\sin\theta\cos\varphi\\ \lambda_2=\rho\sin\theta\sin\varphi\quad(0\leqslant\rho<+\infty,0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)\\ \lambda_3=\rho\cos\theta\end{cases}$$

则

$$\rho . r = \rho . r\cos\theta$$

于是,再由重积分变换公式便可得到

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{8\pi^3}\int_0^{+\infty}d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}e^{-i\rho r\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{8\pi^3}\cdot 2\pi\int_0^{+\infty}\frac{\sin a\rho t}{iar}d\rho\int_0^{\pi}e^{-i\rho r\cos\theta}(i\rho r\sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin a\rho t}{iar}\left[e^{-i\rho r\cos\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\rho$$

$$=\frac{1}{2\pi^2 ar}\int_0^{+\infty}\sin a\rho t\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{i\rho r}-e^{-i\rho r}\right)d\rho$$

$$=\frac{1}{2\pi^2 ar}\int_0^{+\infty}\sin a\rho t\sin\rho r d\rho$$

$$=\frac{1}{2\pi^2 ar}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\left[\cos\rho(r-at)-\cos\rho(r+at)\right]d\rho$$

因为,$\cos\rho(r-at)$,$\cos\rho(r+at)$关于 ρ 为偶函数;$\sin\rho(r-at)$,$\sin\rho(r+at)$关于 ρ 为奇函数.所以

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{8\pi^2 ar}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos\rho(r-at)-\cos\rho(r+at)\right]d\rho\right.$$

$$\left.+i\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sin\rho(r-at)-\sin\rho(r+at)\right]d\rho\right)$$

$$=\frac{1}{8\pi^2 ar}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{i\rho(r-at)}-e^{i\rho(r+at)}\right]d\rho$$

由于 $F^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1.e^{i\lambda x}d\lambda=\delta(x)$,于是

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{4\pi ar}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\rho(r-at)}d\rho-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\rho(r+at)}d\rho\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi ar}\left[\delta(r-at)-\delta(r+at)\right]$$

又因为 $r+at>0$,所以,$\delta(r+at)=0$,故得三维波动方程初值问题的格林函数为

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{4\pi ar}\delta(r-at)$$

其中 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$

三、求解波动方程初值问题的格林函数法

下面我们将看到求解三维波动方程初值问题(A)的格林函数法，与求解热传导方程初值问题的格林函数法基本类似，但也确有其特殊性. 为此，我们以三维问题为例，先引述初位移化初速原理：

定理 4.1 设 $v(x,y,z,t)$是定解问题

$$(D)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ \qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty,t>0) & (4\text{-}13) \\ v|_{t=0}=0 \qquad (-\infty<x,y,z,<+\infty) & (4\text{-}14) \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x,y,z) \qquad (-\infty<x,y,z<+\infty) & (4\text{-}15) \end{cases}$$

的三次连续可微解*，则

$$u(x,y,z,t)=\frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial t} \tag{4-16}$$

必为定解问题

$$(E)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty,t>0) & (4\text{-}17) \\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z) \qquad (-\infty<x,y,z<+\infty) & (4\text{-}18) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \qquad (-\infty<x,y,z<+\infty) & (4\text{-}19) \end{cases}$$

的解.

证明 由于 $v(x,y,z,t)$三次连续可微，于是，按微商换序定理，把(4-13)式两端对 t 求偏微商可得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)=a^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right]$$
$$(-\infty<x,y,z<+\infty,t>0)$$

---

* 所谓 $v(x,y,z,t)$三次连续可微，即是 v 对 x,y,z,t 的所有的三次偏微商$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3},\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y\partial z},\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial z\partial t},\cdots$等皆连续.

这说明由(4-16)式所确定的函数 $u(x,y,z,t)$，满足(4-17)式；按(4-15)式又知，它还满足(4-18)式.

由(4-13)、(4-14)、(4-16)诸式可知

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right|_{t=0}=a^2\left.\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right|_{t=0}$$

$$=a^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v|_{t=0})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(v|_{t=0})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(v|_{t=0})\right]=0$$

这表明，由(4-16)式所确定的函数 $u(x,y,z,t)$ 满足(4-19)式. 综上所述，便得到了定理的全部证明.

关于定理 4.1，我们作如下几点说明：

1° 此定理不仅适用于处理含齐次方程，初速为零的波动方程的初值问题，而且，用类似方法不难证明初位移化初速原理，对于含齐次方程齐次边界条件，初速为零的波动方程的混合问题，如

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) & [(x,y,z)\in D,t>0]\\ u|_{\Gamma}=0 & (t>0)\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & [(x,y,z)\in D]\end{cases}$$

也适用，其中 D 为三维空间中某区域，Γ 为 D 的边界；此外，不难看出，它对于一维、二维的上述类型问题，只须作简单的相应变化，初位移化初速原理，便照样成立；

2° 该定理表明，定解问题(E)的解为定解问题(D)的解之对 t 的偏微商. 特别值得强调的，正是它把定解问题(E)的初位移项化为定解问题(D)的初速度项，因此，我们才把该定理称为初位移化初速原理. 下面转而讨论求解定解问题(A)，即求

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty,t>0)\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z) \qquad (-\infty<x,y,z<+\infty)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x,y,z) \qquad (-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}$$

的格林函数法. 按迭加原理可知,为了求解该定解问题,只须求解

$$
(F)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) & (-\infty<x,y,z<+\infty,t>0)\\ u_1\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x,y,z) & (-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}
$$

$$
(H)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right) & (-\infty<x,y,z<+\infty,t>0)\\ u_2\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\dfrac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 & (-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}
$$

以及

$$
(K)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)\\ \qquad\qquad(-\infty<x,y,z<+\infty,t>0)\\ u_3\big|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \qquad (-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}
$$

并且

$$
\begin{aligned}u(x,y,z,t)=&u_1(x,y,z,t)+u_2(x,y,z,t)\\&+u_3(x,y,z,t)\end{aligned}
$$

由三维 δ-函数的运算性质知

$$
\psi(x,y,z)=\iiint_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi,\eta,\zeta)\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)d\xi d\eta d\zeta
$$

据此,按迭加原理可见,定解问题(F)之解为

$$
u_1(x,y,z,t)=\iiint_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi,\eta,\zeta)W(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)d\xi d\eta d\zeta \quad (4\text{-}20)
$$

其中 $W=W(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)$为定解问题

$$
(L)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)\\ \qquad\qquad(-\infty<x,y,z<+\infty,t>0)\\ W\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=0}=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)\\ \qquad\qquad(-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}
$$

的解. 比较定解问题(L)与(B),易见(L)的解正是三维波动方程初值问题的格林函数,于是,由格林函数的解析求法及(4-20)式可知

$$u_1(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi,\eta,\zeta)\delta(r-at)\frac{1}{r}d\xi d\eta d\zeta \quad (4\text{-}21)$$

其中 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$，设

$$\begin{cases}\xi=x+r\sin\theta\cos\varphi\\ \eta=y+r\sin\theta\sin\varphi\\ \zeta=z+r\cos\theta\end{cases} \quad (4\text{-}22)$$

其中 $0<r<+\infty$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$. 由(4-22)式及重积分变换公式，若记 $\psi_1(r,\theta,\varphi)=\psi(\xi,\eta,\zeta)$则

$$u_1(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\int_0^{+\infty}dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\psi_1(r,\theta,\varphi)\frac{\delta(r-at)}{r}r^2\mathrm{Sin}\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{+\infty}r\psi_1(r,\theta,\varphi)\delta(r-at)dr$$

注意 $at>0$，并由第一章§1.5所述 δ-函数的性质1.2的推论1.1*可知

$$u_1(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}at\psi_1(at,\theta,\varphi)\sin\theta d\theta$$

今设 S_{at}^M 为以点 $M(x,y,z)$为心，$r=at$ 为半径的球面(如图 4-2)，则由(4-10)式确定的(ξ,η,ζ)为 S_{at}^M上的点. 此外，不难推得 S_{at}^M上的曲面元 ds 的面积(仍记为 ds)为

$$ds=a^2t^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

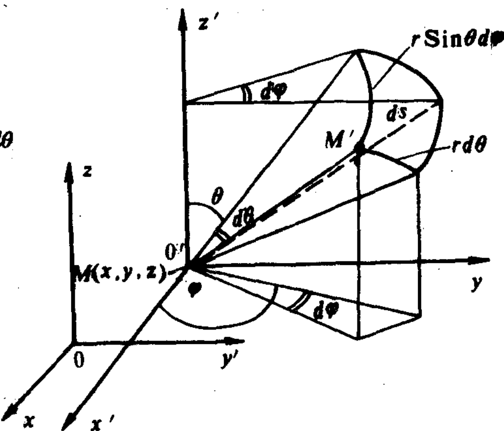


图 4-2

故有

---

* 这里是借助于与此推论相类似，证明也雷同的下述结论：设 $f(x)$ 于$[a,+\infty)$上连续，若 $\xi\geqslant a$，则$\int_a^{+\infty}f(x)\delta(x-\xi)dx=f(\xi)$.

$$u_1(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}^M} \psi(\xi,\eta,\zeta)ds \tag{4-23}$$

据此，按初位移化初速原理可知，定解问题(H)的解为

$$u_2(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^M} \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds \tag{4-24}$$

而按杜哈美原理，则可求得定解问题(K)的解为

$$u_3(x,y,z,t) = \int_0^t \frac{d\tau}{4\pi a^2(t-\tau)}\iint\limits_{S_{a(t-\tau)}^M} f(\xi,\eta,\zeta,\tau)ds$$

上式还可以进一步化简，一方面简化后的形式便于掌握；另一方面，这种简化形式的物理意义也更为明显*. 设 $R=a(t-\tau)$，则 $d\tau=-\frac{dR}{a}$，从而，有

$$u_3(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\frac{dR}{R}\iint\limits_{S_R^M} f(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{R}{a})ds$$

记 T_{at}^M 为以 $M(x,y,z)$ 为心，at 为半径的球体，而(ξ,η,ζ)为该球体内的点，则

$$\begin{cases}\xi = x + R\sin\theta\cos\varphi \\ \eta = y + R\sin\theta\sin\varphi \\ \zeta = z + R\cos\theta\end{cases} \qquad (0\leqslant R\leqslant at, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$$

并记

$$dv = dRds$$

便有

---

* $u_3(x,y,z,t)$的简化表达式常称之为推迟势. 它表明在与点 $M(x,y,z)$距离为 R 的点(ξ,η,ζ)处的振源，应当在时刻 $t-\frac{R}{a}$发出的传播速度为 a 的波，才能恰好在时刻 t 对点 M 产生影响.

$$u_3(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{T_{at}^M}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{R}{a}\right)}{R}dv \tag{4-25}$$

由(4-23)至(4-25)式立即得到所求定解问题(A)的解为

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\left[\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds+\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds\right.$$
$$\left.+\iiint\limits_{T_{at}^M}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{R}{a}\right)}{R}dv\right] \tag{4-26}$$

(4-26)式常被人们称为基尔霍夫(Kirchhoff)公式，上述借助于格林函数(即点源函数)，并利用迭加原理求得三维波动方程初值问题的解的方法，称为三维波动方程初值问题的格林函数法或点源函数法.

上述格林函数法，对任何维数的波动方程，原则上是普遍有效的. 下面举例说明：

例 4.2 利用格林函数法求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin t & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u\big|_{t=0}=\cos 2x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=e^{-x} & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

解 根据上面讨论的格林函数法的步骤，首先求定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ G\big|_{t=0}=0,\quad \dfrac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=0}=\delta(x-\xi) & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

的解 $G=G(x,\xi,t)$. 为此，分别于其方程及初始条件两端对 x 取傅氏变换，并记 $G(x,\xi,t)$ 傅氏变换为 $F[G(x,\xi,t)]=\tilde{G}(\lambda,\xi,t)$，则得

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\tilde{G}(\lambda,\xi,t)}{dt^2}=-a^2\lambda^2\tilde{G}(\lambda,\xi,t)\\ \tilde{G}(\lambda,\xi,t))\big|_{t=0}=0\\ \dfrac{d\tilde{G}(\lambda,\xi,t)}{dt}\Big|_{t=0}=F[\delta(x-\xi)]\end{cases}$$

不难求得此常微分方程初值问题的解为

$$\widetilde{G}(\lambda,\xi,t)=\frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda}\cdot F[\delta(x-\xi)]$$

可以验证，函数 $\sin(a\lambda t)/a\lambda$ 是矩形脉冲函数

$$f_0(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & \text{当 } |x|\leqslant at \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } |x|>at \text{ 时}\end{cases}$$

的傅氏变换，亦即

$$F[f_0(x)]=\frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda}$$

于是，根据傅氏变换的褶积定理，立即得所求的格林函数为

$$\begin{aligned}G(x,\xi,t)&=F^{-1}[\widetilde{G}(\lambda,\xi,t)]=F^{-1}[F(f_0(x)).F(\delta(x-\xi))]\\&=f_0(x)*\delta(x-\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_0(\eta)\delta(x-\xi-\eta)d\eta\\&=f_0(x-\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & \text{当 } |x-\xi|\leqslant at\\ 0 & \text{当 } |x-\xi|>at\end{cases}\end{aligned}$$

其次，为了按格林函数法求原定解问题的解 $u=u(x,t)$，由迭加原理，只须求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u_1|_{t=0}=0,\quad \dfrac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0}=e^{x} & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u_2|_{t=0}=\cos 2x,\quad \dfrac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

以及

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\sin t & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u_3|_{t=0}=0,\quad \dfrac{\partial u_3}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

并且

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t)$$

由 δ-函数的运算性质和上述格林函数的求法，可知

$$u_1(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi}G(x,\xi,t)d\xi=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}e^{-\xi}d\xi$$

$$=\frac{1}{2a}\left[e^{-(x-at)}-e^{-(x+at)}\right]=\frac{e^{-x}}{a}\mathrm{sh}(at)$$

由初位移化初速原理，再仿照 u_1 的求法，得

$$u_2(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos2\xi G(x,\xi,t)d\xi=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\cos2\xi d\xi\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4a}(\sin2(x+at)-\sin2(x-at))\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos2(x+at)+\cos2(x-at)\right]$$

再根据杜哈美原理以及 u_1 的求法，可得

$$u_3(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\tau G(x,\xi,t-\tau)d\xi$$

$$=\int_0^t\sin\tau d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\frac{1}{2a}d\xi$$

$$=\int_0^t(t-\tau)\sin\tau d\tau=t\int_0^t\sin\tau d\tau-\int_0^t\tau\sin\tau d\tau$$

$$=t(1-\cos t)+t\cos t-\sin t=t-\sin t$$

最后，所求定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{e^{-x}}{a}\mathrm{sh}(at)+\frac{1}{2}\left[\cos2(x+at)\right.$$
$$\left.+\cos2(x-at)\right]+t-\sin t$$

完全仿照例 4.2 的求法，不难利用格林函数法，求得一般的一维波动方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(x,t) & (-\infty<x<\infty,t>0)\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) G(x,\xi,t) d\xi \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t) d\xi \\
& + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau) d\xi
\end{aligned}
$$

其中 $G(x,\xi,t)$ 为一维波动方程初值问题的格林函数(见例 4.2).由该格林函数的表达式可知,所求的解还可以进一步表示为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] \\
& + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi
\end{aligned}
$$

例 4.3 试用格林函数法求解

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x,y,t) & (-\infty < x,y < +\infty, t > 0) \\
u|_{t=0} = \varphi(x,y), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y) & (-\infty < x,y < +\infty)
\end{cases}
$$

解 鉴于二维波动方程初值问题的格林函数,直接通过傅氏变换求解

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) & (-\infty < x,y < +\infty, t > 0) \\
G|_{t=0} = 0, \left.\dfrac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(x-\xi, y-\eta) & (-\infty < x,y < +\infty)
\end{cases}
$$

的解时,积分计算相当困难.因此,我们另找一种较为简捷的途径——借助于格林函数法,先求得某个三维波动方程初值问题的解,再通过降低维数的方法,进而得到所求的二维波动方程初值问题的解.这种方法称为降维法.

为此,首先将原定解问题分解为如下两个定解问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) & (-\infty < x,y < +\infty, t > 0) \\
u_1|_{t=0} = \varphi(x,y), \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y) & (-\infty < x,y < +\infty)
\end{cases}
$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) & (-\infty<x,y<+\infty,t>0)\\ u_2\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u_2}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 & (-\infty<x,y<+\infty)\end{cases}$$

按迭加原理可知

$$u(x,y,t)=u_1(x,y,t)+u_2(x,y,t)$$

所谓二维空间波动问题，其实也可以看成三维空间波动问题，只不过是其解与某一个空间变量无关而已. 于是，所谓降维法便是，按格林函数法求出这个三维波动问题的解，然后消去与所论二维波动问题无关的空间变量，便得所求的二维波动问题的解. 为此，记 $u_1(x,y,t)=\hat{u}(x,y,z,t)$；$\varphi(x,y)=\hat{\varphi}(x,y,z)$；$\psi(x,y)=\hat{\psi}(x,y,z)$，则 $\hat{u}=u_1(x,y,t)$满足定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2}\right) & (-\infty<x,y,z<+\infty,t>0)\\ \hat{u}\big|_{t=0}=\hat{\varphi}(x,y,z),\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\hat{\psi}(x,y,z) & (-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}$$

图 4-3

根据(4-26)式(即基尔霍夫公式)，有

$$\hat{u}(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\Big[\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\hat{\psi}(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\hat{\varphi}(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds\Big]$$

其中 S_{at}^M 为以 $M(x,y,z)$ 为心，$r=at$ 为半径的球面(如图 4-3). 今将上式中的曲面积分化成二重积分来计算，以便达到消元降维之目的. 于是，先要计算曲面元 ds 在 oxy 平面上的投影面积元 $d\sigma$. 在 S_{at}^M 的上半球面上任取一点 $P(\xi,\eta,\zeta)$，考虑曲面 S_{at}^M 上包含该点的曲面元 ds. 若记 S_{at}^M 之于 $P(\xi,\eta,\zeta)$ 点处的外法向量为 $N(\xi,\eta,\zeta)$，$d\sigma$ 为 ds 在 oxy 平面上的投影的面积元，则有

$$d\sigma=\cos\langle Nz\rangle ds \qquad (\langle Nz\rangle \text{ 为 } N \text{ 与 } Z \text{ 轴之夹角})$$

另记 $P(\xi,\eta,\zeta)$ 点在 oxy 平面上的投影点为 $Q(\xi,\eta,0)$，则

$$\cos\langle Nz\rangle=\frac{r_{PQ}}{at}=\frac{\sqrt{(at)^2-r_{MQ}^2}}{at}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}{at}$$

故

$$ds=\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\sigma$$

对于 S_{at}^M 的下半球，也作类似的处理，并注意到 S_{at}^M 的上、下球面的对称性，若记 S_{at}^M 的上、下半球分别为 $\bar{S}_{at}^M$、$\tilde{S}_{at}^M$，则

$$u_1(x,y,t)=\hat{u}(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\Big[\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\hat{\psi}(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds+\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\hat{\varphi}(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds\Big]$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\Big[\iint\limits_{\bar{S}_{at}^M}\frac{\hat{\psi}(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds+\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\bar{S}_{at}^M}\frac{\hat{\varphi}(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds$$

$$+\iint\limits_{\tilde{S}_{at}^M}\frac{\hat{\psi}(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds+\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\tilde{S}_{at}^M}\frac{\hat{\varphi}(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds\Big]$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\cdot 2\left(\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta)}{t}\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\sigma\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{t}\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\sigma\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\left(\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\sigma\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\sigma\right)$$

其中Σ_{at}^M为S_{at}^M之上、下半球在oxy平面上的投影——即以$M(x,y)$为心,at为半径的圆域.

由此以及杜哈美原理立即得

$$u_2(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{f(\xi,\eta,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\sigma$$

故,所求定解问题的解为

$$u(x,y,t)=u_1(x,y,t)+u_2(x,y,t)$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\left(\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\sigma\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\sigma$$

$$\left.+\int_0^t d\tau\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{f(\xi,\eta,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\sigma\right)$$

4.1.3 Green 函数概念的进一步引伸

综上所述,不难看出,我们是把描述非稳定过程(即与时间变量有关)的初值问题的格林函数,定义为含相应的齐次方程以及初始条

件中最高阶初速微商*为 δ-函数，余者（如果有的话）为齐次条件的定解问题的解. 从而，对上述描写非稳定过程的初值问题，得到了格林函数的统一的定义方式. 然而，这种定义有一个明显的缺陷——就是对描述稳定过程的定解问题是不适用的. 因为这种定解问题，既然与时间变量无关，当然也就不含初始条件. 因此，也就无法应用于描述稳定过程的定解问题. 于是，前面所谓的格林函数统一的定义方式，还有必要加以引伸，以便按照新的统一方式来定义既适合于非稳定过程，又适合于稳定过程的定解问题的格林函数. 这样作不仅在方法论上有着明显的意义，而且也便于掌握.

我们容易看到，之所以不能把描述非稳定过程的定解问题的格林函数概念，直接推广到描述稳定过程的定解问题上，就在于它们之间的定解条件的本质差别. 但是，这三种典型的数学物理方程却都有一个适用于迭加原理的线性方程. 下面我们就从这里入手来展开问题的论述. 并且还以一维热传导问题和三维波动问题为例来引伸格林函数的概念.

根据一维热传导方程初值问题的格林函数的物理意义，$G(x,\xi,t-\tau)$ $(t\geqslant\tau\geqslant0)$**是表征一个无界杆在只具有于 $x=\xi$ 处，当 $t=\tau$ 时瞬时起作用的所谓瞬时点热源所引起的温度分布. 此杆的温度分布规律，除了可以按 4.1.1 中的（二）完全类似的论述所获得的定解问题

---

* 对于热传导方程初值问题，初始条件中只有初位移条件，这相当于对零阶初速微商的限制条件，而对于波动方程的初值问题，则初始条件中最高初始微商为初速度项——一阶微商项. 其余的初始条件则还有对初位移的限制条件.

** $G(x,\xi,t-\tau)$既然相当于格林函数 $G(x,\xi,t)$中的变量 t 为 $t-\tau$ 的情形，而 $G(x,\xi,t)$又相当于 $G(x,\xi,t-\tau)$中的 $\tau=0$ 的情形. 因此，人们也常称 $G(x,\xi,t-\tau)$为一维热传导方程初值问题的格林函数. 其实，我们完全可以一开始就把(4-7)式定义为

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}$$

当时只是为了简捷才采用了(4-7)式之定义. 这正象我们把格林函数定义为 $G(x,\xi,t)$时，$G(x,\xi,t-\tau)$可以看作 $G(x,\xi,t)$经适当时间变量替换而得到的一样，当我们采用了 $G(x,\xi,t-\tau)$为格林函数之定义时，$G(x,\xi,t)$则可以看作格林函数当 $\tau=0$ 时的特殊情形. 这就充分说明用 $G(x,\xi,t)$还是用 $G(c,\xi,t-\tau)$作为格林函数的定义，其意义是完全相同的.

$$(A)\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>\tau>0)\\ G\big|_{t=\tau}=\delta(x-\xi) & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

来进行数学描述外，基于 δ-函数的物理意义，显然，我们也能将此杆的温度分布规律，数学地表达为如下的定解问题

$$(B)\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\delta(x-\xi,t-\tau)\\ \qquad\qquad\qquad(-\infty<x<+\infty,t>\tau>0)\\ G\big|_{t=\tau}=0 \qquad (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

当然，我们也还可以采用与第二章中所讨论的杜哈美原理的物理论证相类似的推理，从定解问题(B)推出定解问题(A). 事实上，由于从初始时刻 $t=0$ 到 $t=\tau-0$，瞬时点热源 $\delta(x-\xi,t-\tau)$（和在 4.1.1 的（二）中所作的假定一样，这里假设所论杆的比热 C 与其密度 ρ 的乘积为 1），一直未曾起作用，所以直到时刻 $t=\tau-0$，杆的温度仍应保持其原来所具有的平衡状态，即

$$G\big|_{t=\tau-0}=0 \tag{4-27}$$

于是，定解问题(B)可以写为

$$(C)\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\delta(x-\xi,t-\tau) & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ G\big|_{t=\tau-0}=0 & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

然而，瞬时点热源 $\delta(x-\xi,t-\tau)$当时刻 t 由 $\tau-0$ 跃到 $\tau+0$ 时却正好起作用. 将定解问题(C)的泛定方程两端对变量 t 由 $t-0$ 到 $t+0$ 积分，根据 δ-函数的性质 1.1 和高维 δ-函数的性质 1.13 以及(4-27)式，便得到

$$G\big|_{t=\tau+0}=a^2\int_{\tau-0}^{\tau+0}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}dt+\delta(x-\xi)\int_{\tau-0}^{\tau+0}\delta(t-\tau)dt=\delta(x-\xi) \tag{4-28}$$

不过，从时刻 $t=\tau+0$ 起，瞬时点热源 $\delta(x-\xi,t-\tau)$已不再起作用，因此，从时刻 $t=\tau+0$ 之后，定解问题(C)中所含泛定方程，实际上应当为齐次方程，即

$$\frac{\partial G}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \qquad (-\infty<x<+\infty,t>\tau>0) \tag{4-29}$$

与在第二章§2.2的例2.2中所作的说明相类似，$G|_{t=\tau}$就应当按$G|_{t=\tau+0}$来理解. 由此以及(4-28)、(4-29)二式便知，定解问题(B)可以化归为定解问题(A). 若将上述推理过程逆推，还可以将定解问题(A)化归为定解问题(B).

综上所述，我们不仅能从问题的物理意义直接看出定解问题(A)与(B)的等价性，而且，借助于上述的推理，使这种等价性得到了物理的论证. 因此，我们自然称定解问题(B)的解，为一维热传导方程初值问题的格林函数，或者称为基本解，也可称为点源函数. 并且，如此定义的格林函数，它的解析求法，当然可以归结为求解定解问题(A)，于是按4.1.1的(三)中，所给出的解析求法求解，便得

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)} \qquad (4\text{-}30)$$

不难看到，尽管定解问题(A)与(B)等价，但是由定解问题(B)出发，来定义一维热传导方程初值问题的格林函数，由于避免了对定解条件的依赖性，所以就便于推广. 这正是本章后面各节中立论的出发点.

至于，借助格林函数$G(x,\xi,t-\tau)$来求解一般的一维热传导方程初值问题

$$(D)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u|_{t=0}=\varphi(x) & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

的解，显而易见，可以完全按照4.1.1的(三)中所述的格林函数法解之. 然而，为了便于把求解非稳定过程的定解问题(D)的格林函数法，推广到求解稳定过程的定解问题上去，我们将把在4.1.1的(三)中给出的求解定解问题(D)的格林函数法，局部地作些引伸.

和以前一样，先将定解问题(D)分解为如下两个定解问题

$$(E)\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u_1|_{t=0}=\varphi(x) & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

与

$$(F)\begin{cases}\dfrac{\partial u_2}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+f(x,t) & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u_2|_{t=0}=0 & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

并且，按迭加原理有

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t) \tag{4-31}$$

求解(E)仍用在 4.1.1 的(三)中所给的方法*，得

$$u_1(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\varphi(\xi)d\xi \tag{4-32}$$

至于求 解定解问题(F)，为了避免使用只适用于求解非稳定过程的定解问题的杜哈美原理，以利于方法的推广，这里采用如下方法求解. 首先利用一维 δ-函数性质 1.2 与推论 1.1，以及高维 δ-函数的性质 1.13，得

$$f(x,t)=\int_0^t f(\xi,\tau)\delta(x-\xi,t-\tau)d\xi$$

为了求解(F)，先求定解问题

$$(H)\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\delta(x-\xi,t-\tau) & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ W|_{t=0}=0 \quad (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

的解 $W=W(x,t,\xi,\tau)$. 由迭加原理可知

$$u_2(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)W(x,t,\xi,\tau)d\xi$$

而按一维热传导方程的格林函数的引伸定义可见

$$W(x,t,\xi,\tau)=G(x,\xi,t-\tau)$$

据此，再由(4-30)式得

$$u_2(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}d\xi \tag{4-33}$$

故，由(4-31)至(4-33)诸式便得定解问题(D)的解为

---

* 求解(E)，仍按 4.1.1 的(一)所述方法进行，似乎与本节所引伸的格林函数定义无关. 然而，只要注意(A)与(B)的等价性，经引伸的格林函数仍可按 § 4.1 所述之方法求得，从而可见其关联.

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}d\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}d\xi$$

于是，这里得到的结果是与在 4.1.1 的(三)中采用格林函数法求解定解问题(A)所得之结果完全一致. 这里借助于引伸定义的格林函数，以及迭加原理，求得一维热传导方程初值问题的解的方法，也称为格林函数法或点源函数法.

这两处所述的求解一维热传导方程初值问题的格林函数法，虽然实质上都是基于迭加原理，特别是依据 δ-函数的运算性质，但是，后面我们将陆续看到，这里在求解定解问题(F)时，由于避免使用杜哈美原理，而直接利用 δ-函数的运算性质，从而使得格林函数法在求解描述稳定过程的定解问题中便于推广. 为了叙述上的统一，我们以下凡是提到求解定解问题的格林函数及其相应的格林函数法，都是指在引伸意义下的相应的概念.

完全类似，我们可以把 4.1.2 中所讨论的三维波动方程初值问题的格林函数定义为定解问题

$$(I)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right)+\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty,t>0) \\ G\big|_{t=0}=0,\quad \dfrac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \qquad (-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}$$

的解 $G=G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)$. 并且，同样可以证明定解问题($I$)与定解问题

$$
(J)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right) & (-\infty < x,y,z < +\infty, t > 0) \\
G\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) & \\
 & (-\infty < x,y,z < +\infty)
\end{cases}
$$

是等价的. 于是,按 4.1.2 的(二)讲述的解析方法求解(J),便得格林函数为

$$
G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau) = \frac{1}{4\pi a r}\delta[r - a(t-\tau)] \qquad (4\text{-}34)
$$

其中 $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$. 有(4-34)式,我们自然可以用相应的格林函数法,求解一般的三维波动方程初值问题

$$
(K)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t) & \\
\qquad (-\infty < x,y,z < +\infty, t > 0) & \\
u\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z); \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x,y,z) & \\
\qquad (-\infty < x,y,z < +\infty) &
\end{cases}
$$

的解. 即先将定解问题(K)分解为三个定解问题

$$
(L)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) & (-\infty < x,y,z < +\infty, t > 0) \\
u_1\big|_{t=0} = 0, \dfrac{\partial u_1}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x,y,z) & (-\infty < x,y,z < +\infty)
\end{cases}
$$

$$
(M)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right) & (-\infty < x,y,z < +\infty, t > 0) \\
u_2\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \dfrac{\partial u_2}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 & (-\infty < x,y,z < +\infty)
\end{cases}
$$

与

$$
(N)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty,t>0) \\ u_3\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u_3}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \qquad (-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}
$$

并且，按迭加原理，有

$$
\begin{aligned}u(x,y,z,t)=u_1(x,y,z,t)+u_2(x,y,z,t)\\ +u_3(x,y,z,t)\end{aligned} \tag{4-35}
$$

对于定解问题(L)、(M)，仍然采用 4.1.2 的(三)中所述的方法分别解得

$$
u_1(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^M}\psi(\xi,\eta,\zeta)ds \tag{4-36}
$$

$$
u_2(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds \tag{4-37}
$$

至于定解问题(N)，我们采用这里所给出的方法，即不用杜哈美原理，直接应用一维 δ-函数的性质 1.2 与推论 1.1 以及高维 δ-函数的性质 1.12 和性质 1.13，便有

$$
\begin{aligned}&f(x,y,z,t)\\ &=\iiiint_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta,\zeta,\tau)\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta,t-\tau)d\xi d\eta d\zeta d\tau\\ &=\int_0^t\delta(t-\tau)d\tau\iiint_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta,\zeta,\tau)\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)d\xi d\eta d\zeta\\ &=\int_0^t d\tau\iiint_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta,\zeta,\tau)\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta,t-\tau)d\xi d\eta d\zeta\end{aligned}
$$

为此，先求解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)+\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta,t-\tau) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty<x,y,z<+\infty,t>0) \\ W|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \qquad (-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}$$

再按三维波动方程初值问题的格林函数的定义，以及(4-34)式，并根据迭加原理，定解问题(N)的解为

$$u_3(x,y,z,t)=\int_0^t d\tau\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\pi ar}\delta[r-a(t-\tau)]f(\xi,\eta,\zeta,\tau)d\xi d\eta d\zeta$$

再仿照 4.1.2 的(三)的处理方法，不难得到

$$u_3(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{T_{at}^M}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\dfrac{R}{a}\right)}{R}dv$$

据此以及(4-35)至(4-37)诸式，所论定解问题(K)的解为

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\left[\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds+\iiint\limits_{T_{at}^M}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\dfrac{R}{a}\right)}{R}dv\right]$$

式中出现的记号的意义与(4-26)式相同. 上述讨论充分说明，我们虽然不直接使用杜哈美原理，但是，也可得出与(4-26)式完全相同的结果. 这种方法也称为三维波动方程初值问题的格林函数法. 从这里可以看到，所谓格林函数法无非是将所论定解问题的求解，分解为几个最简单的定解问题求解，然后按迭加原理将所求得的解迭加之，便得到所论定解问题的解. 其物理意义则在于把一般的“源”分解成为瞬时点源的迭加，把连续分布的量看成集中分布的量的迭加. 从而，使得这种方法成为切实可行的有效方法. 其中 δ-函数的作用则是十分

明显的，它使得上述“分解”成为可能，而且为格林函数的解析求法提供了简捷有效的运算工具. 换句话说，正是由于运算灵活、物理意义明显的 δ-函数，从中起了关键性的作用，才使得格林函数法也同时具有物理意义鲜明、方法简捷、灵活、行之有效等特点.

纵观上述对一维热传导方程及三维波动方程初值问题的格林函数的引伸定义，不难发现，它们确实已经摆脱了定解条件的束缚，这就使得我们能够把格林函数概念进一步加以推广，从而，引进对任何定解问题都适用的统一的数学定义. 为此，设 T 为二阶线性微分算子*. 不言而喻，方程

$$Tu = f \tag{4-38}$$

则囊括了本章所要讨论的三种典型数学物理方程的各种可能情形.

---

* 即 T 是具有线性运算性质的微分运算符号. 也就是 T 作用于某函数上，则相当于对该函数作某种微分运算，例如，对于微分方程

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{(n-1)}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

若记

$$T = a_0 \frac{d^n}{dx^n} + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dx} + a_n \tag{*}$$

并规定

$$Ty = \left(a_0 \frac{d^n}{dx^n} + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dx} + a_n \right) y$$
$$= a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y$$

则有

$$Ty = f(x)$$

在此意义下，若记

$$T = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{**}$$

则方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ 可写为 $Tu = f(x,t)$ 等等. 至于 T 具有线性运算性质，即对任意常数 α, β 以及函数 y_1, y_2 恒有

$$T(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T y_1 + \beta T y_2$$

此外，规定微分算子中所出现的最高阶微商的阶数为该微分算子的阶数. 如若 T 为由（*）式子所表示的，则称 T 为 n 阶微分算子；若 T 为由（**）式子所表示的，则称 T 为二阶微分算子等等.

相应于方程(4-38)，我们还将考虑方程

$$Tu = \delta \tag{4-39}$$

这里(4-38)、(4-39)二式中，出现的二阶微分算子 T 是相同的；而(4-38)中的函数 f 及(4-39)式中的 δ-函数对变量的依赖关系，皆取决于 T 的具体形式.

如若记

$$T = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

则相应的 f,δ 分别为 $f=f(x,y,t)$，$\delta=\delta(x-\xi,y-\eta,t-\tau)$；若

$$T = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

则相应的 $f=f(x,y,z)$，$\delta=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)$；若

$$T = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

则相应的 f,δ 又分别为 $f=f(x,t)$，$\delta=\delta(x-\xi,t-\tau)$，如此等等. 鉴于方程(4-38)式具有广泛的代表性，因此，一般地来讨论含方程(4-38)的定解问题中的定解条件，自然未必具体给出，于是，我们在下面也称含方程(4-38)的定解问题为由方程(4-38)与相应的定解条件而构成的定解问题. 定解条件中为零者也称为齐次定解条件. 至此，便可引进如下的定义.

定义 4.1 考虑方程(4-38)式与相应的定解条件所构成的定解问题，记之为(X)，若记(4-39)式与将(X)中的全部定解条件改为齐次条件合起来所构成的定解问题为(Y)，则称(Y)的解为(X)的格林函数，也称点源函数或基本解*.

下面我们举例说明，在按定义 4.1 求得格林函数的基础上，求解

---

* 注意按此定义，位势方程的第二边值问题的格林函数不存在，从而，此定义对这类问题不适用，而应另行引进所谓广义格林函数的概念，由于篇幅所限，不再涉及.

严格说来，基本解与格林函数是有区别的，格林函数是定义 4.1 所给的概念；而基本解则与定解条件无关，其定义应当是：方程(4-39)式的解称为方程(4-38)式的基本解. 由此可见格林函数其实乃是特殊的基本解.

所论的定解问题的格林函数法.

例 4.4 利用格林函数法，求定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\sin t & (-\infty<x,y<+\infty,t>0)\\ u|_{t=0}=1\end{cases}$$

的解.

解 首先按定义 4.1 寻找二维热传导方程初值问题的格林函数，即求定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)+\delta(x-\xi,y-\eta,t-\tau)\\ \qquad\qquad (-\infty<x,y<+\infty,t>0)\\ G|_{t=0}=0 \qquad\qquad (-\infty<x,y<+\infty)\end{cases}$$

的解 $G=G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)$. 仿照第二章 § 2.4 所述的杜哈美原理的物理论证及推理过程，此定解问题可归结为求

$$\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right) & (-\infty<x,y<+\infty,t>\tau>0)\\ G|_{t=\tau}=\delta(x-\xi,y-\eta) & (-\infty<x,y<+\infty)\end{cases}$$

的解．采用傅氏变换法(仿照一维情形解此定解问题)不难求得其格林函数为

$$G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)=\frac{1}{4a^2\pi(t-\tau)}e^{-[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]/4a^2(t-\tau)}$$

其次，由迭加原理，为求原定解问题的解 $u=u(x,y,t)$，只须求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right)+\sin t & (-\infty<x,y<+\infty,t>0)\\ u_1|_{t=0}=0 \quad (-\infty<x,y<+\infty)\end{cases}$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_2}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right) & (-\infty<x,y<+\infty,t>0)\\ u_2|_{t=0}=1 \quad (-\infty<x,y<+\infty)\end{cases}$$

鉴于

$$\sin t=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\tau\,\delta(x-\xi,y-\eta,t-\tau)d\xi$$

所以，按迭加原理及格林函数 $G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)$ 的求法可得

$$u_1(x,y,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\tau G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)d\xi$$

$$=\int_0^t \sin\tau d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(y-\eta)^2/4a^2(t-\tau)}d\eta$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}d\xi$$

$$=1-\cos t$$

仍按上述格林函数的求法及迭加原理可求得

$$u_2(x,y,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot G(x,y,\xi,\eta,t)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4a^2\pi t}e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}d\xi=1$$

故，所求定解问题的解为

$$u(x,y,t)=u_1(x,y,t)+u_2(x,y,t)$$

$$=2-\cos t$$

完全仿照例 4.4 的求解方法，不难利用格林函数法求得一般的二维热传导方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty<x,y<+\infty,t>0) \\ u|_{t=0}=\varphi(x,y) \qquad\qquad (-\infty<x,y<+\infty)\end{cases}$$

的解为

$$u(x,y,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)d\xi$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)d\xi$$

$$=\frac{1}{4a^2\pi}\int_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta,\tau)e^{-[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]/4a^2(t-\tau)}d\xi$$

$$+\frac{1}{4a^2\pi t}\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)e^{-[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]/4a^2t}d\xi$$

不言而喻，上述格林函数法是符合定义 4.1 的. 并且，我们在下

面要讨论稳定过程的定解问题以及混合问题的格林函数法时，也都将按定义 4.1 分别引进格林函数的定义.

§4.2 位势方程定解问题的 Green 函数与 Green 函数法

由于二维与三维位势方程定解问题的格林函数法，既有共性，又有区别，所以，我们对三维情形将做较详细的讨论，而对二维情形只做提纲挈领的陈述.

4.2.1 三维位势方程定解问题的 Green 函数法

考虑三维位势方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z) \qquad (x,y,z)\in\Omega \tag{4-40}$$

其中 Ω 为方程(4-40)式中所含势函数 u 的定义域.

若 Ω 不是全空间(即 Ω 不是整个 $oxyz$ 空间时)，则含(4-40)式的定解问题中，应对未知函数 $u=u(x,y,z)$ 在其有限边界处附加以边界条件；若 Ω 是全空间，则含(4-40)式的定解问题中必然不显含边界条件. 鉴于 Ω 有上述两种区别，所以，以下分别讨论.

一、势函数的定义域为全空间的情形

此时所谓含位势方程(4-40)式的定解问题，其实只显含方程(4-40)式. 具体写出来为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z) \quad (-\infty<x,y,z<+\infty) \tag{4-41}$$

按 §4.1 中的定义 4.1，我们称

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)$$

$$(-\infty<x,y,z<+\infty) \tag{4-42}$$

之解 $G=G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ 为三维位势方程关于全空间的格林函数. 也称为基本解或点源函数.

(一)格林函数的解析求法及其物理意义

按上述格林函数之定义，为求三维位势方程的关于全空间的格林函数，只须求出方程(4-42)式的解即可. 为此，我们于方程(4-42)式两端对 x,y,z 取三维傅氏变换，并记

$$F[G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)] = \tilde{G}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\xi,\eta,\zeta)$$

再利用三维 δ-函数的傅氏变换公式可知

$$\tilde{G} = -\frac{1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}e^{-i(\lambda_1\xi+\lambda_2\eta+\lambda_3\zeta)}$$

于是，对 $\tilde{G}$ 取傅氏逆变换便得

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = F^{-1}[\tilde{G}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\xi,\eta,\zeta)]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{-1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}e^{-i(\lambda_1(\xi-x)+\lambda_2(\eta-y)+\lambda_3(\zeta-z))}d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$$

记矢量

$$\boldsymbol{\rho} = \{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\},\quad \boldsymbol{r} = \{x-\xi, y-\eta, z-\zeta\}$$

做旋转坐标轴的变换，以使得 λ_3 轴与 $\boldsymbol{r}$ 的指向一致，由于旋转坐标轴的变换不改变矢量的内积与模，因此，若记

$$\rho = |\boldsymbol{\rho}| = \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3},$$

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

且令

$$\begin{cases}\lambda_1 = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \lambda_2 = \rho\sin\theta\sin\varphi \quad (0\leqslant\rho<+\infty, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi) \\ \lambda_3 = \rho\cos\theta\end{cases}$$

则

$$\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{r} = \rho r\cos\theta$$

于是，按三重积分在球坐标之下的积分变换公式，有

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{+\infty}d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{e^{-i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{r}}}{\rho^2}\rho^2\sin\theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot 2\pi\int_0^{+\infty}d\rho\int_0^{\pi}e^{-i\rho r\cos\theta}\sin\theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{r\rho i}[e^{-i\rho r\cos\theta}]_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\rho$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\rho}\frac{1}{2i}[e^{i\rho r}-e^{-i\rho r}]d\rho$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\rho r}{\rho}d\rho = -\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\rho r}{\rho r}d(\rho r)$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz = -\frac{1}{2\pi^2 r}\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{4\pi r}$$

这说明三维位势方程关于全空间的格林函数为

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = -\frac{1}{4\pi r}$$

$$\left(r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} \right) \quad (4\text{-}43)$$

借助于物理上的电位的概念，不难得知，此格林函数的物理意义在于，它表示点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 处，放以电量为 $-\frac{1}{4\pi}$ 的电荷，在介电常数 $\varepsilon=1$ 的无限大均匀介质中，所产生的静电场内任一点 $P(x,y,z)$ 处的电位分布，或者表示于点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 处放置以单位负电荷，在介电常数 $\varepsilon=\frac{1}{4\pi}$ 的无限大的均匀介质中所产生的静电场内任一点 $P(x,y,z)$ 处的电位分布.

（二）格林函数法

为求解三维位势方程的于全空间上的定解问题(4-41)式，由于

$$f(x,y,z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)f(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta$$

于是，只须求出(4-42)式的解 $G=G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$，并且，按迭加原理，(4-41)式的解为

$$u(x,y,z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)f(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta \quad (4\text{-}44)$$

而(4-42)式的解正是三维位势方程关于全空间的格林函数，再由(4-43)、(4-44)二式立即得到，(4-41)式的解为

$$u(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\left(r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} \right)$$

我们把上述基于求格林函数，并借助于迭加原理，求得三维位势

方程于全空间上的定解问题的解的方法，称为关于全空间上的三维位势方程的格林函数法．或者称点源函数法．

二、势函数的定义域不为全空间的情形

这时，所谓三维位势方程(4-41)式于 Ω 上的定解问题，还应于 Ω 的边界上附加所谓定解条件．

我们以下仅以第一类边界条件为例来讨论．记 Γ 为区或 Ω 的边界．而

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

常称为三维拉普拉斯(Laplace)算子．考虑一般的定义于 Ω 上，三维位势方程的第一边值问题

$$(A)\quad \begin{cases} \Delta_3 u = f(x,y,z) \qquad (x,y,z) \in \Omega & (4\text{-}45) \\ u\big|_\Gamma = \varphi(x,y,z) & (4\text{-}46) \end{cases}$$

基于定义 4.1，我们仍然定义定解问题

$$(B)\quad \begin{cases} \Delta_3 G = \delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) \qquad (x,y,z) \in \Omega & (4\text{-}47) \\ G\big|_\Gamma = 0 & (4\text{-}48) \end{cases}$$

（其中点 (ξ,η,ζ) 为 Ω 内的参变点）的解 $G=G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$，为三维位势方程的关于区域 Ω 的第一边值问题的格林函数．由于定解问题 (B) 在物理上表示了在集中点源作用下的位势分布，因此，也称此格林函数为点源函数或基本解．

（一）格林函数的进一步确定

为了能够在已得结果即(4-43)式基础上，寻求一个确定上述格林函数的有效方法，我们取(4-43)式作为方程(4-47)式的一个特解，并令

$$K = K(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) + \frac{1}{4\pi r}$$

$$\left(r = \sqrt{(r-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \right)$$

则 $K=K(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ 为拉普拉斯方程第一边值问题

$$(C)\begin{cases} \Delta_3 K = 0 \\ K\big|_\Gamma = \left.\dfrac{1}{4\pi r}\right|_{(x,y,z)\in\Gamma} \end{cases}$$

的解，为简便起见，记 $P=P(x,y,z)$，$Q=Q(\xi,\eta,\zeta)$，$r=r_{PQ}$，则有

$$G(P,Q)=-\frac{1}{4\pi r}+K(P,Q)$$

$$\left(r_{PQ}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right) \quad (4\text{-}49)$$

这里，定解问题(C)的解 $K(P,Q)$也称为此格林函数的正则部分. 鉴于$-\frac{1}{4\pi r_{PQ}}$为已知函数，于是，确定格林函数(4-49)式的关键在于求得 $K=K(P,Q)$，即只须求解一个拉普拉斯方程满足已知边界条件的第一边值问题(C). 因此，我们也把上述格林函数称为拉普拉斯方程关于区域 Ω 的第一边值问题的格林函数，后面将会看到，把确定上述格林函数的问题转化为求解特殊的定解问题(C)是一个实质性的相当关键的步骤.

(二)格林函数的性质及其物理意义

1. 格林函数的物理意义

下面我们以静电场的电位理论为背景，来简述由(4-49)式所确定的格林函数的物理意义.

众所周知，按静电场的理论，若只于 $Q(\xi,\eta,\zeta)$点处置以电量为 q 的点电荷，则在介电常数为 $\varepsilon=1$ 的均匀介质中所产生的电场内的任一点 $P(x,y,z)$处的电位为

$$u(P,Q)=\frac{q}{r_{PQ}}$$

$$\left(r_{PQ}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right) \quad (4\text{-}50)$$

若除点 Q 处有点电荷外，电场内还有感应电荷存在，则电场内任一点的电位，应该是该点电荷单独存在时，所产生电场的电位(4-50)式与感应电荷所产生的电场于所论点处的电位的迭加，为此，若设想以 Γ 为边界曲面的区域 Ω 的内部是介电常数为 $\varepsilon=1$ 的均匀介质，而 Γ 为绝缘导体壳，在 Ω 内部某点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$处置以电量为$-\frac{1}{4\pi}$

的点电荷*，则由静电感应原理，在绝缘导体壳 Γ 上产生感应电荷. 按上述的电位迭加原理可知，在 Ω 内部任一点 $P(x,y,z)$ 处的电位 $V(P,Q)$ 应该等于该点电荷单独存在时所产生的电场的电位 $-\frac{1}{4\pi r_{PQ}}$ 与感应场在 P 点的电位（记为 $K(P,Q)$）的迭加，即

$$V(P,Q)=-\frac{1}{4\pi r_{PQ}}+K(P,Q) \tag{4-51}$$

其中 $r_{PQ}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$. 因为静电场内的电位函数，在电场中没有电荷分布于其上的点处满足拉普拉斯方程，于是，$K(P,Q)$ 在 Ω 内部任一点 $P(x,y,z)$ 处满足拉普拉斯方程，再根据三维位势方程的关于全空间上格林函数(4-43)式的物理意义可知，由(4-51)式所确定的 $V(P,Q)$ 是定解问题(B)中方程(4-47)式的解**；更若假定上述绝缘导体壳为接地导体，则 Γ 上每点电位都为零，换言之，此时由(4-51)式所确定的电位函数 $V(P,Q)$ 还满足定解问题(B)中的边界条件(4-48)式，这表明此电位函数 $K(P,Q)$ 正好描述了由(4-49)式所进一步确定的三维拉普拉斯方程，关于区域 Ω 的第一边值问题的格林函数 $G(P,Q)$，也就是说，此格林函数的物理意义，是当接地绝缘导面内部为介电常数 $\varepsilon=1$ 的均匀介质，且其内放以电量为 $-\frac{1}{4\pi}$ 的点电荷时，在该导体内的电位分布.

2. 格林函数的性质

由(4-49)式及由此所确定的格林函数的物理意义，不难得知此格林函数 $G(P,Q)$ 具有如下性质：

1° **对称性** $G(P,Q)=G(Q,P)$ （也称互易性）

2° **调和性** 当 $P\neq Q$ 时，$G(P,Q)$ 是 P 在 Ω 内的调和函数***；

---

* 或者设想以绝缘导体壳 Γ 为边界区域 Ω 的内部是介电常数为 $\varepsilon=4\pi$ 的均匀介质，且于 Ω 内部某点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 处置以单位负电荷.

** 由定义 4.1 脚注 * 中关于基本解的确切定义可知，此时的电位函数 $u(P,Q)$ 正是三维位势方程基本解的物理意义.

*** 若 $u=u(x,y,z)$ 是拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 在某区域 D 内具有连续的二阶偏微商的解，则称 $u=u(x,y,z)$ 为域 D 内的调和函数，或称 $u=u(x,y,z)$ 于 D 内调和.

3° 齐次性　$G(P,Q)$在边界曲面Γ上，满足齐次边界条件$G(P,Q)|_{\Gamma}=0$；

4° 奇偶性　$G(P,Q)$在点Q处具有奇异性，即$\lim\limits_{P\to Q}G(P,Q)=\infty$

(三) 格林函数法

1. 方法的弊端

基于前面的论述可知，所谓利用格林函数法求解定解问题(A)，无非是借助于寻求相应的格林函数，并运用迭加原理来求解，有鉴于此，自然应当首先把(A)化为含齐次边界条件的定解问题，而在通常情况下是不难通过某种变换实现的. 因此，不妨设已将(A)化为

$$(D)\begin{cases}\Delta_3 V = F(P) & (P\in\Omega)\\ V|_{P\in\Gamma}=0\end{cases}$$

其中$P=P(x,y,z)$，若记$Q=Q(\xi,\eta,\zeta)$，则可将等式

$$F(x,y,z)=\iiint\limits_{\Omega} F(\xi,\eta,\zeta)\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)d\xi d\eta d\zeta$$

简记为

$$F(P)=\iiint\limits_{\Omega} F(Q)\delta(P-Q)dV_Q$$

据此，以及三维拉普拉斯方程关于区域Ω的格林函数定义，即(4-49)式所确定的函数$G=G(P,Q)$，再按迭加原理，立即可知(B)的解为

$$V(P)=\iiint\limits_{\Omega} F(Q)G(P,Q)dV_Q \tag{4-52}$$

再按上述定解问题(D)与(A)的关系，并根据(4-52)式，便可求出(A)的解.

然而，上述求定解问题(A)的所谓格林函数法，却有着明显的弊端：

1° 这种方法的核心在于借助格林函数，运用迭加原理来求解，因此，一个必不可少的步骤是：只要(A)中含有非齐次边界条件，首先就应当选取适当的变数变换，将其化为齐次边界条件. 即使是(A)中所含泛定方程为齐次方程，也必须遵循这一步骤. 此种苛刻要求，

实际上就显得有些过分了.

2° 一般说来，由(4-49)式确定的格林函数，在 Ω 内部的表达式常常比较复杂，作为(B)的解的积分表达式(4-52)，只能借助于该格林函数在 Ω 内部的表达式而得出，从而，通过(4-52)式所获得(A)的解的表达式，也就势必更为复杂. 为了克服上述各弊端，我们有必要对定解问题(A)的解的表达形式，作进一步的探讨，从而，对上述方法作进一步的实质性的改进，得出对于求解三维位势方程的边值问题的更行之有效的格林函数法.

2. 方法的改进

为了改进上述方法，我们需要引用高等数学中的奥-高(Остроградский-Gauss)定理，及数学物理方程中的两个基本公式——格林公式.

定理 4.2 设 Ω 是以按片光滑*的曲面 Γ 为边界面的有界区域，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 皆在 $\bar{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上连续，且在 Ω 内有连续的一阶偏微商，则

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

---

* 为了说明按块光滑，须先说明什么是光滑曲面. 设三维空间 $oxyz$ 中某曲面S的参数方程为：$x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$，$z=\omega(u,v)$，$(u,v)\in D$，其中 D 为 uv 平面上某个区域，若 $\varphi(u,v)$，$\psi(u,v)$，$\omega(u,v)$ 皆于 D 上具有连续的一阶偏导数，并且

$$\rho(u,v)=\sqrt{\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\\ \frac{\partial\omega}{\partial u} & \frac{\partial\omega}{\partial v}\end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial\omega}{\partial u} & \frac{\partial\omega}{\partial v}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}\right)^2}$$

在 D 上恒不为零，则称 S 为光滑曲面. 这里 $\rho(u,v)$ 在 D 上恒不为零，即在 D 上每点 (u,v) 处的三个雅可比行列式中至少有一个不为零，即是保证 S 上每点 (x,y,z) 处的切平面都存在.

设三维空间 $oxyz$ 中某曲面 σ 的参数方程为 $x=\xi(u,v)$，$y=\eta(u,v)$，$z=\omega(u,v)$，$(u,v)\in G$. 其中 G 为 uv 平面上某个区域. 若 G 可分为有限个子区域 $G_1,G_2,\cdots,G_n$，使 σ 上的每片曲面

$$\sigma_k: x=\xi(u,v),\ y=\eta(u,v),\ z=\omega(u,v),\ (u,v)\in G_k\ (k=1,2,\cdots,n)$$

都是光滑的曲面，则称曲面 σ 为按片光滑的曲面.

$$= \iint_{\Gamma} [P\cos\langle n,x\rangle + Q\cos\langle n,y\rangle + R\cos\langle n,z\rangle] ds^{*} \qquad (4\text{-}53)$$

其中 $\cos\langle n,x\rangle,\cos\langle n,y\rangle,\cos\langle n,z\rangle$ 是曲面 Γ 在点 (x,y,z) 处的外法向量 n 的方向余弦.(4-53)式又常称为奥-高公式.这个定理在高等数学中已有详细证明,此处不再赘述.

基于定理 4.2,不难推得在数学物理方程中极为有用的两个基本公式.

推论 4.1 设 Ω 是以按片光滑的曲面 Γ 为边界的有界区域, $u(x,y,z),v(x,y,z)$ 皆于 $\Omega+\Gamma$ 上具有连续的一阶偏微商,在 Ω 内有连续的二阶偏导数,则

$$\iiint_{\Omega} u\Delta v dv = \iint_{\Gamma} u\frac{\partial v}{\partial n} ds$$

$$-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)dv \qquad (4\text{-}54)$$

其中 $\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial n}$ 为函数 $v(x,y,z)$ 在曲面 Γ 上的点 (x,y,z) 处,沿该曲面的外法向的微商.

证明 令 $P=u\frac{\partial v}{\partial x},Q=u\frac{\partial v}{\partial y},R=u\frac{\partial v}{\partial z}$,则按假设条件以及奥-高定理,立即可知

$$\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]dv$$

---

* 采用场论中的记号,(4-53)式可以表示为简单的形式.记 $a=(P,Q,R)$,n_0 为外法向量 n 的单位向量,从而

$$n_0 = [\cos\langle n,x\rangle,\cos\langle n,y\rangle,\cos\langle n,z\rangle]$$

再记有向曲面元 $ds=ds\cdot n$,则(4-53)式可写为

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{div}\, a dv = \iint_{\Gamma} a\cdot ds$$

$$= \iint_{\Gamma} u\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\cos\langle n,x\rangle + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\langle n,y\rangle + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\langle n,z\rangle\right\}ds$$

对于上式左端之被积函数中的每一项，利用函数乘积的微商公式，而其右端的被积函数，则利用方向导数的定义便可得到(4-54)式.

(4-54)式常称之为格林第一公式，这个公式与定积分中的分部积分公式相类比，不难发现，此公式的作用相当于高维积分中的分部积分公式，可见其重要意义.

推论 4.2 在推论 4.1 的假设条件下，有

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta_3 v - v\Delta_3 u)\,dv = \iint_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds^{*} \qquad (4\text{-}55)$$

证明 于推论 4.1 的(4-54)式中，将 u,v 的位置互换，则有

$$\iiint_{\Omega} v\Delta_3 u\,dv = \iint_{\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial n}ds - \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dv$$

将(4-54)式与此式相减，便得所要证的(4-55)式.

(4-55)式常称为格林第二公式，它不仅具有格林第一公式所具有的意义，而且由于其表达形式更具有对称性，结果更为简捷，因此，也更为常用. 特别是从格林第二公式的表达形式不难看出，它显然更适用于调和函数的深入研究，事实上，基于格林第二公式，我们不难推得调和函数的积分表达式，该积分表达式是研究位势方程的基本公式，并在许多方面广为应用.

定理 4.3 设 Ω 是以按片光滑曲面 Γ 为边界面的有界区域，$u(P)$于 $\bar{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上具有连续的一阶偏微商，在 Ω 内具有连续的二阶偏微商，且为泊松(Poisson)方程的第一边值问题

---

* 采用场论中的记号，(4-55)式可以更为简捷地表示为

$$\iiint_{\Omega} [u\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,v) - v\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u)]dv = \iint_{\Gamma} [u(\mathrm{grad}\,v) - v(\mathrm{grad}\,u)]ds$$

$$(A)\begin{cases}\Delta_3 u(P)=f(P) & (P\in\Omega)\\ u|_{\Gamma}=\varphi(P)\end{cases}$$

的解. 若由(4-49)式所确定的拉普拉斯方程关于区域 Ω 的第一边值问题的格林函数 $G(P,Q)$存在，且其正则部分 $K(P,Q)$作为 P 的函数于 $\bar{\Omega}$上具有连续的一阶偏微商，则当 $P(x,y,z)\in\Omega$ 时，$u(P)$有如下积分表达式

$$u(P)=\iint\limits_{\Gamma}\varphi(Q)\frac{\partial G(Q,P)}{\partial n_Q}dS_Q+\iiint\limits_{\Omega}G(Q,P)f(Q)dV_Q \quad (4\text{-}56)$$

证明 由(4-45)$\times G(P,Q)-$(4-47)$\times u(P)$，并于 Ω 上积分得

$$\iiint\limits_{\Omega}[G(P,Q)\Delta u(P)-u(P)\Delta G(P,Q)]dV_P$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}G(P,Q)f(P)dV_P-\iiint\limits_{\Omega}u(P)\delta(P-Q)dV_P \qquad (Q\in\Omega)$$

再根据格林公式(4-55)、δ-函数的运算性质，以及(4-46)、(4-48)二式，并且，为了习惯，将 P、Q 的记号互换，便得定解问题(A)的解的积分表达式为

$$u(P)=\iint\limits_{\Gamma}\varphi(Q)\frac{\partial G(Q,P)}{\partial n_Q}dS_Q+\iiint\limits_{\Omega}G(Q,P)f(Q)dV_Q \qquad (P\in\Omega)$$

由假定 $K(P,Q)$为 $G(P,Q)$的正则部分，因而它于 Ω 内调和，即 $K(P,Q)$作为 P 的函数于 Ω 内具有连续的二阶偏微商，且

$$\Delta_3 K(P,Q)=0 \qquad (P\in\Omega)$$

据此，以及关于 $u(P)$的假设条件，对 $K(P,Q)$及 $u(P)$应用格林第二公式(或(4-56)式)，有

$$\iint\limits_{\Gamma}\left[K(Q,P)\frac{\partial}{\partial n_Q}u(Q)-u(Q)\frac{\partial K(Q,P)}{\partial n_Q}\right]dS_Q$$

$$-\iiint\limits_{\Omega}K(Q,P)\Delta_3 u(Q)dV_Q=0$$

于是

$$u(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left[\frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial u(Q)}{\partial n_Q}-u(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)\right]dS_Q$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\Delta_3 u(Q)}{r_{PQ}}dV_Q \qquad (4\text{-}57)$$

推论 4.3 在定理 4.3 的假设条件下，且 $u(P)$ 为拉普拉斯方程的第一边值问题

$$(E)\begin{cases}\Delta_3 u(P)=0 & (P\in\Omega)\\ u|_{\Gamma}=\varphi(P)\end{cases}$$

的解．若由(4-49)式所确定的格林函数 $G(P,Q)$ 存在，并且，其正则部分 $K(P,Q)$ 作为 P 的函数于 Ω 上具有连续的一阶偏微商，则当 $P(x,y,z)\in\Omega$ 时，$u(P)$ 有如下积分表达式

$$u(P)=\iint_{\Gamma}\varphi(Q)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}dS_Q \qquad (4\text{-}58)$$

推论 4.4 在定理 4.3 的假设条件下，更若 $u(P)=u(x,y,z)$ 在域 Ω 内调和，由定理 4.3 和推论 4.3 以及(4-57)式可知当 $P\in\Omega$ 时恒有

$$u(P)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left[u(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)-\frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial}{\partial n_Q}u(Q)\right]dS_Q \qquad (4\text{-}58)'$$

(4-58)′式称为三元调和函数的积分表达式．推论 4.4 揭示了在 Ω 内为调和的函数 u 在 Ω 内部的值，是由 u 及 u 的梯度 $\mathrm{grad}u$（注意 $\frac{\partial u}{\partial n}=\mathrm{grad}u\cdot n_0$）在 Ω 的边界曲面 Γ 上的值所决定的这一重要事实．正是基于这一事实，才使得(4-57)式成为数学物理方程中的重要公式，特别在位势方程的研究中，往往起着很基本的作用．

综上所述，所谓三维位势方程第一边值问题的改进的格林函数法，就是通过求得由(4-49)式所确定的格林函数 $G(P,Q)$，再依据(4-56)式求解定解问题(A)的方法．至于这种方法为什么能克服原格林函数法的弊端，而成为改进的格林函数法，我们将在本段的最后详细说明．

关于上述所谓改进的格林函数法，作几点注释：

1° 定理 4.3 只是表明 $u(P)$ 是(A)的解的必要条件，并且可用

(4-56)式表示之，反之，则不得而知了. 因为，要在一般情形下验证(4-56)式是(A)的解，那是非常困难的；

2° 无论是原来的还是改进的格林函数法，都表明要求并非全空间某域 Ω 上的狄里赫利(Dirichlet)问题*的解，只须求出(4-49)式的 $G(P,Q)$，而按(4-49)式，为求 $G(P,Q)$又只须求其正则部分 $K(P,Q)$. 也就是只须求解一个特殊的拉普拉斯方程第一边值问题

$$(C)\begin{cases}\Delta_3 K = 0 & (P \in \Omega)\\ K\big|_\Gamma = \dfrac{1}{4\pi r_{PQ}}\end{cases}$$

的解. 这就把原来求解定解问题(A)的问题，大大地简化了，这正是(无论是原来的还是改进的)格林函数法的优越之处. 显然，只要区域 Ω，边界 Γ 的形状业经确定，定解问题(C)便完全确定. 这又进一步说明由(4-49)式所给出的 $G(P,Q)$，其实只依赖于 Ω 的边界形状. 这个重要事实，一方面深刻地揭示了 Ω 的边界形状，对求解狄里赫利问题是十分关键的因素；另一方面则富有启示性地说明：人们一旦求出了该问题的格林函数，便一劳永逸地解决了这个区域上的任一狄里赫利问题，至少在原则上是如此；

3° 正是由于格林函数法(无论是原来的还是改进的)对于区域的形状的依赖性，因此，至使这种方法具有相当的局限性. 事实上，采用这种方法，远不能解决任意区域上的狄里赫利问题. 一方面是因为并非对任何区域 $G(P,Q)$都存在；另一方面既使已论证了在某些区域上 $G(P,Q)$是存在的，却也还未必能具体地求出来；再说，既使求出了 $G(P,Q)$，正如 1°中所指出的，要证明(4-56)或(4-57)式是定解问题(A)的解也常非易事；

4° 然而，除了上述 2°中所说在方法论上的重要意义外，格林函数法的实用意义，则在于对某些常见的区域，如球、半空间、平面和圆域等，不仅可以用初等方法求出其格林函数，而且，还容易证明对这

---

* 即含位势方程的第一边值问题. 若该位势方程为泊松方程则称为泊松方程的狄里赫利问题；若该位势方程为拉普拉斯方程则称为拉普拉斯方程的狄里赫利问题.

些常见区域而言，由(4-56)或(4-57)式所确定的函数，确为定解问题(A)的解，从而，既简捷又彻底地解决了这些虽然特殊却是常见的区域上的任一狄里赫利问题.

由此可见，格林函数法最终归结为，拉普拉斯方程关于某些常见的特殊类型的区域的第一边值问题的格林函数的求法. 为此，下面我们介绍两种求法，即静电源象法和特解法.

3. 静电源象法

这是求格林函数的一种常用方法，此法不仅相当初等，而且，物理背景也十分鲜明，是一种既便于掌握，又便于应用的有效方法.

前面已经指出，按(4-49)式求 $G(P,Q)$，又只须求其正则部分 $K(P,Q)$，而由 $G(P,Q)$的物理意义可知，其正则部分 $K(P,Q)$是代表当绝缘导面 Γ 内部(介电常数 $\varepsilon=1$ 的)均匀介质中某点 Q 处置一电量为 $-\frac{1}{4\pi}$的电荷时，该导面的感应电荷所产生的感应电场在 Γ 内部的点 P 处的电位. 我们设想 Γ 上的感应电荷，可由 Ω 外的若干带适当电量的点电荷替代，以使得这些点电荷所产生的电场在 Γ 内的点 P 处的电位等于 $K(P,Q)$. Ω 外部的这些假想的点电荷常称为替代点电荷，由于替代电荷在 Ω 之外，故替代电荷所产生的电场在 Ω 内部的电位分布函数，显然满足拉普拉斯方程. 于是，由定解问题(C)便知，欲使替代电荷产生的电场在 Ω 内任一点 P 处的电位，与上述感应电场于 P 点处的电位相等，只须使前者在 Ω 的边界面上的电位为 $\frac{1}{4\pi r_{PQ}}$(其中 $Q\in\Omega$，为上述置以带电量为 $-\frac{1}{4\pi}$的点电荷之点，P 为 Γ 上任一点)，这正是我们寻求替代点电荷的原则和出发点. 从而，也就成为我们具体求 $G(P,Q)$的正则部分 $K(P,Q)$的原则和出发点. 由(4-49)式所确定的格林函数的物理意义又可知，这一原则显然也可以表述为：所求替代点电荷，无非是使得位于 Ω 内的点电荷 Q 与这些替代点电荷所产生的电场于 Ω 的边界面 Γ 上的任一点的电位恒为零.

鉴于替代点电荷的作用，实质是替代由于在 Ω 内部的点 Q 处，置以电量为 $-\frac{1}{4\pi}$的点电荷而在绝缘导体壳 Γ 上所产生的应感电荷

的作用．由静电感应原理，不难推知替代点电荷在 Ω 外部的具体位置及其带电量，应与点 Q 在 Ω 内的位置有关，因此，我们称置于点 $Q\in\Omega$ 处的点电荷为静电源，而称替代点电荷为静电象．由静电源找静电象而确定格林函数的方法叫做静电源象法．

下面我们举例说明静电源象法的应用．

例 4.5 求球域上的格林函数并解定解问题(A)

解 设 Ω 为 $oxyz$ 空间内以原点为心，R 为半径的球体：

$$x^2+y^2+z^2<R^2$$

其边界面为

$$\Gamma:\qquad x^2+y^2+z^2=R^2$$

对于 Ω 内异于原点的任一点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$，若设 Q_1 为点 Q 关于球面 Γ 的反演点*，则

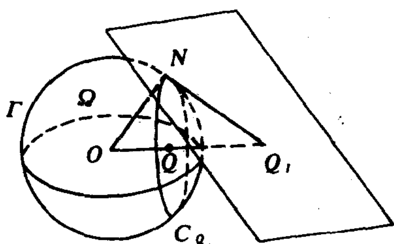
$$r_{OQ}\cdot r_{OQ_1}=R^2$$

从而，Q_1 在 Γ 之外．

---

* 空间内两点 QQ_1 称为关于以 O 点为球心，以 R 为半径的球面互为反演的，如果

$$r_{OQ}\cdot r_{OQ_1}=R^2$$



则反演点的求法如图，设 Q 为球 Ω 内任一点，连结 OQ，过 Q 点作 OQ 的垂直平面，交球面 Γ 上于一圆周记为 C_Q．于 C_Q 上任取一点 N，过 N 点作球面 Γ 的切平面，交 OQ 的延长线于点 Q_1，Q_1 点即是所求的 Q 的反演点．

首先，由平面几何知识不难证明，Q_1 的位置与 N 在 C_Q 上的位置无关，从而说明 Q_1 是唯一确定的，其次，很明显 ONQ_1Q 这四点共面，所以，由 $\triangle ONQ\backsim\triangle ONQ_1$ 得

$$\frac{r_{ON}}{r_{OQ_1}}=\frac{r_{OQ}}{r_{ON}}$$

注意 $r_{ON}=R$，于是 $r_{OQ}\cdot r_{OQ_1}=R^2$．按定义，Q_1 正是 Q 关于球面 Γ 的反演点．仿此倒推，则不难作出球 Ω 外的点之关于 Γ 的反演点．

特别地，由定义可知球心 O 与无穷远点关于球面 Γ 是互为反演的．

按格林函数的物理意义，设想于点 Q 处置以电量为 $-\frac{1}{4\pi}$ 的点电荷，且球体 Ω 内分布介电常数为 $\varepsilon=1$ 的均匀介质. 若于点 Q_1 处置以电量为 q 的点电荷，则此点电荷所产生的电场于 $P(x,y,z)\in\Omega$ 处的电位为 $\frac{q}{r_{PQ_1}}$. 按上述寻找替代点电荷的原则，为使在 Q_1 处所放电量为 q 的点电荷，确为替代电荷，即使格林函数 $G(P,Q)$ 的正则部分为

$$K(P,Q)=\frac{q}{r_{PQ_1}}\qquad(P\in\Omega)\tag{4-59}$$

只须选取 q 适合等式

$$\frac{q}{r_{PQ_1}}=\frac{1}{4\pi r_{PQ}}\qquad(P\in\Gamma)$$

就够了，因此，应有

$$q=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{r_{PQ_1}}{r_{PQ}}\quad(P\in\Gamma)\tag{4-60}$$

为说明由(4-60)式确定的 q 值，与 Γ 上 P 点的位置无关，尚须证明比值 $\frac{r_{PQ_1}}{r_{PQ}}$ 确与 $P\in\Gamma$ 的位置无关，事实上，对任一 $P\in\Gamma$，由于 Q_1 是

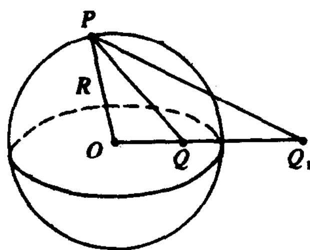


图 4-5

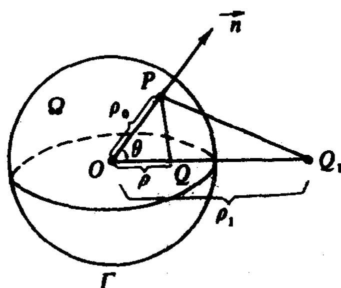


图 4-6

Q 关于 Γ 的反演点，如图 4－5，并注意 $r_{OP}=R$，可知

$$\frac{r_{OQ_1}}{r_{OP}}=\frac{r_{OP}}{r_{OQ}}$$

从而

$$\triangle OQ_1P \backsim \triangle OQP$$

据此，若以常数 ρ 记 OQ 的长度，即 $r_{OQ}=\rho$，则

$$\frac{r_{OQ_1}}{r_{PQ}}=\frac{r_{OP}}{r_{OQ}}=\frac{R}{\rho}$$

这说明由(4-60)式所给出的 q 是与 $P\in\Gamma$ 的位置无关的，而且又是完全确定的数，于是，由(4-60)、(4-59)和(4-49)各式，立即得到球域上的格林函数为

$$G(P,Q)=-\frac{1}{4\pi r_{PQ}}+K(P,Q)$$

$$=\frac{1}{4\pi r_{PQ}}+\frac{R}{4\pi\rho r_{PQ_1}}\quad (P\in\Omega) \tag{4-61}$$

其中 $Q\in\Omega$；Q_1 为 Q 关于 Γ 的反演点，$\rho=r_{OQ}$．

在利用格林函数法求解定解问题(A)时，须要借助于其解的积分表达式(4-56)式，当所给区域 Ω 为球域时，为使(4-56)式更清晰，我们将基于(4-61)式对 $G(P,Q)$ 与 $\left.\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_p}\right|_{P\in\Gamma}$ 作进一步的计算. 如图 4-6 所示，记 $r_{OP}=\rho_0, r_{OQ}=\rho, r_{OQ_1}=\rho_1, \angle POQ=\theta$. 注意到 Q_1 是 Q 关于 Γ 的反演点，从而，$\rho_1\rho=R^2$，按余弦定理有

$$r_{PQ_1}^2=\rho_0^2+\rho_1^2-2\rho_0\rho_1\cos\theta=\rho_0^2+\frac{R^4}{\rho^2}-2\rho_0\frac{R^2}{\rho}\cos\theta$$

又在△OPQ 内有

$$r_{PQ}^2=\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\,\rho\cos\theta$$

故，按(4-61)式可知

$$G(P,0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{R}{\rho r_{PQ_1}}-\frac{1}{r_{PQ}}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{R}{(\rho_0^2\rho^2+R^4-2\rho_0\rho R^2\cos\theta)^{1/2}}-\frac{1}{(\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\theta)^{1/2}}\right) \tag{4-62}$$

从而

$$\left.\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\right|_{P\in\Gamma}=\left.\frac{\partial G}{\partial\rho_0}\right|_{\rho_0=R}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{R^3\rho\cos\theta-R^2\rho^2}{(R^2\rho^2+R^4-2R^3\rho\cos\theta)^{3/2}}\right.$$

$$\left.+\frac{R-\rho\cos\theta}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\theta)^{3/2}}\right)$$

$$=\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\theta)^{3/2}}=\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R r_{PQ}^3} \qquad (4\text{-}63)$$

把(4-62)、(4-63)代入(4-56)得定解问题(A)当 Ω 以原点为心，R 为半径的球形域时的解，是

$$u(P)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{\Gamma}\varphi(Q)\frac{R^2-\rho^2}{r_{PQ}^3}dS_Q$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}f(Q)\Big(\frac{R}{(\rho_0^2\rho^2+R^4-2\rho_0\rho R^2\cos\theta)^{3/2}}$$

$$-\frac{1}{(\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\theta)^{1/2}}\Big)dV_Q \qquad (4\text{-}64)$$

例 4.6 求半空间上的格林函数并解定解问题(A).

解 设 Ω 为 $oxyz$ 空间内的上半空间 $z>0$，于 Ω 内任取一点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$，按格林函数的物理意义，设想在点 Q 处放置电量为 $-\frac{1}{4\pi}$ 的点电荷，且半空间 Ω 内分布介电常数为 $\varepsilon=1$ 的均匀介质. 取 Q_1 为 Q 之关于 Ω 的边界面 Γ 即平面 $z=0$ 的对称点*，若于 Q_1 处置以电量为 q 的点电荷，则此点电荷所产生的电场，于 $P(x,y,z)\in\Omega$ 处的电位为 $\frac{q}{r_{PQ_1}}$.

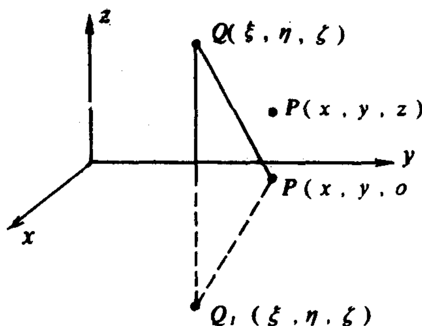


图 4-7

由寻求替代点电荷的原则，为使置于 Q_1 处电量为 q 的点电荷能充任替代点电荷，亦即使格林函数的正则部分为

---

* 关于平面 $z=0$ 互为对称的两个点，也称为关于该平面互为反演的点. 因此，这里确定替代点电荷的位置，其实也是寻求放置点电荷的给定点 Q 之关于所论区域边界面的反演点.

$$K(P,Q)=\frac{q}{r_{PQ_1}} \qquad (P\in\Omega) \tag{4-65}$$

只须选取 q,使之适合

$$\frac{q}{r_{PQ_1}}=\frac{1}{4\pi r_{PQ}} \qquad (P\in\Gamma)$$

由于此处 Γ 为 $z=0$,所以,$P(x,y,z)\in\Gamma$ 的充分必要条件为 P 点的 z 坐标为零(如图 4-7). 又因 Q_1,Q 为对称点,故 $r_{PQ_1}=r_{PQ}$即得 $q=\frac{1}{4\pi}$. 代入(4-65)式,并由(4-49)式可知

$$\begin{aligned}G(P,Q)&=-\frac{1}{4\pi r_{PQ}}+K(P,Q)\\&=\frac{1}{4\pi r_{PQ_1}}-\frac{1}{4\pi r_{PQ}}\\&=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\\&\quad-\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\end{aligned} \tag{4-66}$$

并且,由(4-66)式可得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\right|_{\Gamma}&=-\left.\frac{\partial G(P,Q)}{\partial z}\right|_{z=0}\\&=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{z+\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}\right.\\&\quad\left.-\frac{z-\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}\right\}\\&=\frac{2\zeta}{4\pi[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}\end{aligned} \tag{4-67}$$

将上述(4-66)、(4-67)二式代入(4-56),则当 Ω 为半空间 $z>0$ 时,定解问题(A)的解为

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\iint_{\Gamma}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}f(\xi,\eta,\zeta)\left\{\frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}\right.$$

$$-\frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2]^{3/2}}\Bigg\} d\xi d\eta d\zeta \qquad (4\text{-}68)$$

上述两例似乎表明：替代点电荷总是只有一个，其实，从下面两例足以说明这是一种错觉.

例 4.7 设 Ω 为 $oxyz$ 空间内 $\frac{1}{4}$ 空间：$y>0,z>0$*，试求拉普拉斯方程关于 Ω 的第一边值问题的格林函数 $G(P,Q)$.

解 如图 4-8 所示，对于 Ω 内任一给定点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$，设想于点 Q 处置以电量为 $-\frac{1}{4\pi}$ 的点电荷，且 Ω 内分布介电常数为 $\varepsilon=1$ 的均匀介质，注意到此时 Ω 的边界面是由 $y=0$ 及 $z=0$ 两个平面所构成的，于是，我们将分别针对边界面 $y=0$ 及 $z=0$，按照寻求替代点电荷的原则求出相应的替代点电荷，然后再合在一起，进行通盘的调整，为使所求之替代点电荷与点电荷 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 所产生的电场，在边界面 $y=0$ 上每点的电位皆为零，根据例 4.6 可知，此替代点电荷应置于 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 的关于平面 $y=0$ 的对称点 $Q_1(\xi,-\eta,-\zeta)$ 处，带电量为 $\frac{1}{4\pi}$；类似地，若只考虑边界面 $z=0$，则另一替代点电荷应置于点 $Q_2(\xi,\eta,-\zeta)$ 处，带电量为 $\frac{1}{4\pi}$. 然而，这样一来，点电荷 Q,Q_1,Q_2 所产生的电场，在边界面 $y=0$ 及 $z=0$ 各点的电位，则显然未必为零. 换言之，点电荷 Q_1、Q_2 放在一起，还不能

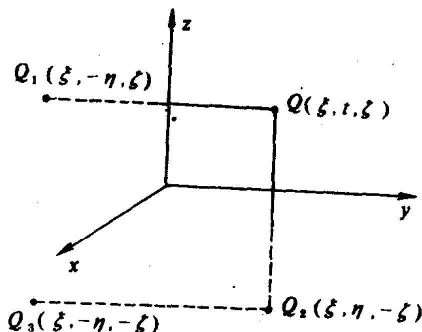


图 4-8

---

* 也可记为：$\Omega=\{(x,y,z)|-\infty<x<+\infty,y>0,z>0\}$. 其含意为满足条件 $y>0,-\infty<x<+\infty$ 以及 $z>0$ 的点 (x,y,z) 的全体.

构成所谓替代点电荷.按寻求替代点电荷的原则,以及例 4.6 的具体作法,不难看出,为寻求所谓替代点电荷,只须再求出 Q_1 的关于 $z=0$ 的对称点 $Q_3(\xi,-\eta,-\zeta)$(它显然也是 Q_2 的关于 $y=0$ 的对称点),并于该点置以带电量为 $-\frac{1}{4\pi}$ 的点电荷,则显而易见点电荷 Q_1、Q_2、Q_3 便是所求的替代点电荷,故所求的格林函数为

$$G(P,Q)=-\frac{1}{4\pi r_{PQ}}+\frac{1}{4\pi r_{PQ_1}}+\frac{1}{4\pi r_{PQ_2}}-\frac{1}{4\pi r_{PQ_3}}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right\}.$$

其中 $P(x,y,z)\in\bar{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上任意一点.

例 4.8 设 Ω 为 $oxyz$ 空间内的半球:$0<z<\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,试求拉普拉斯方程关于 Ω 的第一边值问题的格林函数 $G(P,Q)$.

解 如图 4-9,对于 Ω 内任一给定点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$,设想于该点处置以电量为 $-\frac{1}{4\pi}$ 的点电荷,且 Ω 内分布介电常数为 $\varepsilon=1$ 的均匀介质.由例 4.5、例 4.6,并仿照例 4.7 的思考方法不难得知,若记 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 之关于平面 $z=0$ 的对称点为 $Q_2(\xi,\eta,-\zeta)$,Q、Q_2 关于球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的反演点分别为 Q_1 和 Q_3,再设 Q_1、Q_2、Q_3 处分别置以带电量为 $\frac{R}{4\pi r_{OQ}}$、$\frac{1}{4\pi}$、$-\frac{R}{4\pi r_{OQ_2}}$,则点电荷 Q_1、Q_2、Q_3 便是所求的替代点电荷,于是,所求的格林函数为

$$G(P,Q)=-\frac{1}{4\pi r_{PQ}}+\frac{R}{4\pi r_{OQ}r_{PQ_1}}$$

$$+\frac{1}{4\pi r_{PQ_2}}-\frac{R}{4\pi r_{OQ_2}r_{PQ_3}}$$

4. 特解法

由(4-56)式所确定的定解问题(A)的解，是由两部分构成的，一项是沿所给区域边界面的曲面积分，一项是沿所给区域内的三重积分. 然而，通过上述几个例子不难看到，即使对于上述异常简单的区域，通过静电源象法所求出的格林函数，在区域内部的表达式，也比其在区域边界上的表达式要复杂得多. 因此，在使用(4-56)式表达定解问题(A)的解时，其结构之复杂常常有碍于应用. 因此，人们自然想到：若将定解问题(A)转化为定解问题(E)，则(4-56)式的第二项就没有了，从而，$u(P)$之表达式也就简化了. 换句话说，这启发人们去寻求一种将求解泊松方程的狄里赫利问题，化归为求解拉普拉斯方程的狄里赫利问题的方法. 这就是所谓的特解法.

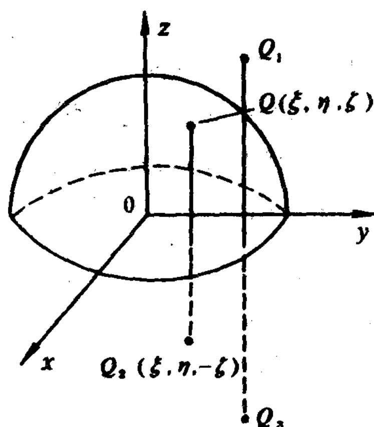


图 4-9

特解法的大意是：首选通过视察法或待定系数法，求出泊松方程的狄里赫利问题

$$
(A)\begin{cases}\Delta_3\ u(P)=f(P) & (P\in\Omega)\\ u|_\Gamma=\varphi(P)\end{cases}
$$

中方程 $\Delta u=f(P)$的一个特解 $v(P)$；其次，令

$$
u=v-w
$$

则得

$$
(A)_1\begin{cases}\Delta_3\omega(P)=0\\ \omega|_\Gamma=\varphi(P)-v|_\Gamma\end{cases}
$$

从而把求解定解问题(A)的问题，转化为求解定解问题$(A)_1$，实现我们原来的设想，下面通过具体例题予以说明.

例 4.9 利用格林函数法求解泊松方程的狄里赫利问题

$$\begin{cases} \Delta u = a + b(x^2 - y^2 - z^2), \text{当 } x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \text{ 时} & (4\text{-}69) \\ u\big|_{x^2+y^2+z^2=R^2} = C & (4\text{-}70) \end{cases}$$

其中 a、b、c、均为常数.

解 首先通过待定系数法，求方程(4-69)式的一个特解 $v(x,y,z)$. 鉴于方程(4-69)式右端是 x 与 y 的二次多项式，而且，不含 x 与 y 的混合乘积项，所以，设

$$v(x,y,z) = Ax^4 + Bx^3 + Dx^2 + A'y^4 + B'y^3 + D'y^2 + A''z^4 + B''z^3 + D''z^2$$

并代入(4-69)式，得

$$12Ax^2 + 6Bx + 2D + 12A'y^2 + 6B'y + 2D' + 12A''z^2 + 6B''z + 2D'' = bx^2 - by^2 - bz^2 + a$$

比较两端系数，有

$$A = \frac{b}{12}, A' = -\frac{b}{12}, A'' = -\frac{b}{12},$$

$$B = B' = B'' = 0, D + D' + D'' = \frac{a}{2}$$

不妨取 $D=D'=0$，则 $D''=\frac{a}{2}$. 于是，所求的特解为

$$v(x,y,z) = \frac{b}{12}(x^4 - y^4 - z^4) + \frac{a}{2}z^2 \qquad (4\text{-}71)$$

令 $u=v+\omega$

则

$$\begin{cases} \Delta\omega = 0 & \text{当 } x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \text{ 时} \\ \omega\big|_{x^2+y^2+z^2=R^2} = C - \frac{b}{12}(x^4 - y^4 - z^4) - \frac{a}{2}z^2 \end{cases}$$

于是，按公式(4-58)立即得到定解问题(4-69)、(4-70)式的解为

$$u(x,y,z) = v + \omega = \frac{b}{12}(x^4 - y^4 - z^4) + \frac{a}{2}z^2 + \frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2=R^2}\left[C - \frac{b}{12}(\xi^4 - \eta^4 - \zeta^4) - \frac{a}{2}\zeta^2\right] \cdot \frac{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}}dS$$

此例中的特解 v，也可以用视察法求得．事实上，注意到

$$\Delta_3\left(b\,\frac{x^4}{12}\right)=bx^2,\Delta_3\left(b\,\frac{y^4}{12}\right)=by^2,\Delta_3\left(b\,\frac{z^4}{12}\right)=bz^2$$

可见

$$\Delta_3\left\{\frac{b}{12}(x^4-y^4-z^4)\right\}=b(x^2-y^2-z^2)$$

又，显然有

$$\Delta_3\left(\frac{a}{2}z^2\right)=a$$

于是，所求的特解为(4-71)式．

鉴于方程(4-69)式有无穷多个解，因此，按特解法所求出的特解，显然不止一个．事实上，按上述方法还可求得方程(4-69)式的另外的特解，如 $v=\frac{b}{12}(x^4-y^4-z^4)+\frac{a}{2}x^2$，$v=\frac{b}{12}(x^4-y^4-z^4)+\frac{a}{2}y^2$，以及 $v=\frac{b}{12}(x^4-y^4-z^4)+\frac{a}{2}z^2+(\alpha x+\beta y+\gamma z)$，($\alpha$、$\beta$、$\gamma$)均为任意常数)等等．这说明特解法是一种相当灵活的方法．

特解法虽然是一种行之有效的方法，可还是有着明显的局限性．因为这种方法要求方程 $\Delta u=f(P)$ 的右端函数具有便于通过视察法或待定系数法，求出其特解的所谓适应性结构．

至此，我们已经能够清楚地看到，上述改进的格林函数法，确实能够克服，或者在某种程度上能够克服原先所指出的弊端．

事实上，根据公式(4-58)式在使用改进的格林函数法，求解定解问题(E)时，不仅不再需要将其所含的非齐次边界条件化为齐次边界条件，而且，因为(E)中所含方程是齐次方程，其解的表达式又不含有沿区域上的三重积分，所以解的结构相当简洁；至于定解问题(A)，只要其右端函数具有适应于特解法的结构——这恰恰是应用中最为常见的结构，采用特解法便可求出其简单的解的表达式．

4.2.2 二维位势方程定解问题的 Green 函数法

考虑二维位势方程

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad (x,y) \in \sigma \tag{4-72}$$

若 σ 为全空间，则此时含方程(4-72)的定解问题，其实就是显含方程

$$\Delta_2 u = f(x,y) \qquad (-\infty < x,y < +\infty) \tag{4-73}$$

鉴于

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \delta(x-\xi, y-\eta) \qquad (-\infty < x,y < +\infty)$$

的解，即(按§4.1的定义4.1)二维位势方程关于全空间的格林函数为

$$G(x,y,\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$$

$$\left(r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right) \tag{4-74}$$

于是，按 δ-函数的运算性质及迭加原理，(4-73)式的解为

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta)\ln\frac{1}{r}d\xi d\eta$$

$$\left(r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)$$

这就是求解二维位势方程的关于全空间上的定解问题的格林函数法或点源函数法.

若 σ 不为全空间，则记 Γ 为区域 σ 的边界，并考虑二维位势方程的第一边值问题

$$(A)\begin{cases} \Delta_2 u = f(x,y) & (x,y) \in \sigma \\ u|_\Gamma = \varphi(x,y) \end{cases}$$

按§4.1的定义4.1，我们自然定义定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 G = \delta(x-\xi, y-\eta) & (x,y) \in \sigma \\ G|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

(其中 $(\xi,\eta) \in \sigma$ 为参变点)的解 $G=G(x,y,\xi,\eta)$ 为二维位势方程的关于区域 σ 的第一边值问题的格林函数，或者称为基本解. 其中，$P=P(x,y)$，$Q=Q(\xi,\eta)$，$r_{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$，仿三维情形，为了利用(4-74)式来确定 $G=G(P,Q)$. 如令

$$K(P,Q) = G(P,Q) + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PQ}} \qquad (4\text{-}75)$$

则 $K(P,Q)$ 显然满足拉普拉斯方程的第一边值问题

$$(B)\begin{cases}\Delta_2 K = 0 \\ K\big|_\Gamma = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_{PQ}}\Big|_{P\in\Gamma}\end{cases}$$

这就把确定上述格林函数 $G(P,Q)$ 的问题，归结为求解拉普拉斯方程之边界条件为已知函数的第一边值问题，因此，也称上述格林函数为拉普拉斯方程关于区域 σ 的第一边值问题的格林函数.

上述格林函数 $G(P,Q)$，具有和三维情形完全类似的属性及物理意义.

为了借助 $G(P,Q)$，并利用迭加原理，求解定解问题 (A). 若 (A) 含非齐次边界条件，则自然首先应当化为齐次边界条件，这只须通过简单的变数变换，就不难实现. 于是，不妨设已将 (A) 化为

$$(C)\begin{cases}\Delta_2 V = F(P) \qquad (P\in\sigma) \\ V\big|_\Gamma = 0\end{cases}$$

由于

$$F(P) = \iint_\sigma F(Q)\delta(P-Q)d\sigma_P$$

以及 $G(P,Q)$ 之定义，可知 (C) 的解为

$$V(P) = \iint_\sigma F(Q)G(P,Q)d\sigma_P$$

据此，以及定解问题 (A) 与 (C) 之间的关系，便可求得 (A) 的解. 这就是所谓求解二维位势方程（其定义域不为全空间）定解问题的格林函数.

通过类比可以看出，上述方法与三维情形具有同样的弊端. 为克服这些弊端，当然有必要对该方法加以改进、更新.

为此，我们给出和奥-高定理相类似的格林公式，即：

定理 4.4 设区域 σ 是按段光滑的简单闭曲线 L 所围成的有界区域. $M(x,y)$、$N(x,y)$ 均于 $\bar{\sigma}=\sigma+L$ 上连续，于 σ 内具有连续的一阶

偏微商，则

$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)d\sigma$$

$$=\int_L [M\cos\langle nx\rangle + N\cos\langle ny\rangle]ds$$

由此，仿照与三维情形类似的推演，容易求得与之类似的格林第一公式和第二公式. 依据这些基本公式和(4-74)式便不难求得如下的研究二维位势方程的基本公式.

定理 4.5 设 σ 是由按段光滑的简单闭曲线 L 所围成的有界区域，$u(x,y)$ 于 $\bar{\sigma}=\sigma+L$ 上具有连续的一阶偏微商，则当 $P(x,y)\in\sigma$ 时，恒有

$$u(P)=-\frac{1}{2\pi}\iint_\sigma \left(\ln\frac{1}{r_{PQ}}\right)\Delta_2 u(Q)d\sigma_Q$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_L \left[u(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\ln\frac{1}{r_{PQ}}\right)-\ln\frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial u(Q)}{\partial n_Q}\right]ds_Q \tag{4-76}$$

更若 $u(x,y)$ 于 σ 内调和，则当 $P(x,y)\in\sigma$ 时，恒有

$$u(p)=-\frac{1}{2\pi}\int_L \left[u(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\ln\frac{1}{r_{PQ}}\right)\right.$$

$$\left.-\ln\frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial u(Q)}{\partial n_Q}\right]ds_Q \tag{4-77}$$

其中 $Q=Q(\xi,\eta)$，$r_{PQ}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$、$\frac{\partial u(Q)}{\partial n_Q}$ 为函数 u 在曲线 L 上的点 $Q(\xi,\eta)$ 处沿曲线外法线方向的微商，$\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\ln\frac{1}{r_{PQ}}\right)$ 也具有类似的意义.

基于定理 4.5，作为改进的格林函数法的重要依据是如下的定理.

定理 4.6 设 σ 是由按段光滑的简单闭曲线 L 所围成的有界区域，$u(P)$ 于 $\bar{\sigma}=\sigma+L$ 上具有连续的一阶偏微商，在 σ 内具有连续的二阶偏微商，且为二维位势方程的第一边值问题(A)的解，其正则部分 $K(P,Q)$ 作为 P 的函数于 σ 上具有连续的一阶偏微商，则当

$P(x,y)\in\sigma$时，有

$$u(P)=\int_L \varphi(Q)\frac{\partial G(Q,P)}{\partial n_Q}ds_Q+\iint_\sigma G(Q,P)f(Q)d\sigma_Q \quad (4\text{-}78)$$

若(A)中$f(p)$于σ上恒为零，即定解问题

$$(D)\begin{cases}\Delta_2 u(P)=0 & (P\in\sigma)\\ u\big|_L=\varphi(P)\end{cases}$$

的解，当$P(x,y)\in\sigma$时，为

$$u(P)=\int_L \varphi(Q)\frac{\partial G(Q,P)}{\partial n_Q}ds_Q \quad (4\text{-}79)$$

所谓改进的格林函数法，与三维情形一样就是通过求由(4-75)式所确定的格林函数$G(P,Q)$，再依据(4-77)与(4-78)二式，分别求解定解问题(A)与(D)的解的方法.

对于这种方法，自然可以象三维情形一样，给出完全类似的四点注释(此处不再重复). 从而，这种改进的格林函数法，其实就是求拉普拉斯方程关于某些常见的特殊类型区域的格林函数法. 最为常见的方法，则是与三维情形类似的静电源象法.

类似于三维静电源象法，不难求得二维拉普拉斯方程关于圆域$x^2+y^2<R^2$上的格林函数为

$$G(P,Q)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PQ}}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho r_{PQ_1}} \quad (4\text{-}80)$$

式中P,Q为圆域$x^2+y^2<R^2$内的点，$\rho=r_{oQ}$，Q_1是Q关于圆周$x^2+y^2=R^2$的反演点，即$r_{oQ}\cdot r_{oQ_1}=R^2$.

利用格林函数法求解定解问题(A)与(D)的解，需要分别借助于公式(4-78)和(4-79). 当区域σ为圆域$x^2+y^2<R^2$，从而曲线L为圆周$x^2+y^2=R^2$时，为了使(4-78)式(或(4-79)式)更清晰起见，基于(4-80)式可以进一步计算如下：

$$G(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{R}{\rho r_{PQ_1}}-\ln\frac{1}{r_{PQ}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\ln\frac{R}{(R^4+\rho^2\rho_0^2-2R^2\rho\rho_0\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$-\ln\frac{1}{(\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\Big)$$

$$\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\Big|_{P\in L}=\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R(\rho^2+R^2-2\rho R\cos\theta)}\Big|_{P\in L}$$

$$=\frac{R^2-\rho^2}{2\pi R r_{PQ}^2}\Big|_{P\in L}$$

其中 $\theta=\angle POQ,\rho_0=r_{OP},\rho=r_{OQ}$. 据此,以及(4-78)、(4-79)与(4-80)诸式可知,定解问题(A)与(D)的解分别为

$$u(P)=\frac{1}{2\pi R}\int_L\varphi(Q)\frac{R^2-\rho^2}{r_{PQ}^2}ds_Q+\frac{1}{2\pi}\iint_\sigma f(Q)\ln\frac{Rr_{PQ}}{\rho r_{QQ_1}}d\sigma_Q$$

$$=\frac{1}{2\pi R}\int_L\varphi(Q)\frac{R^2-\rho^2}{r_{PQ}^2}ds_Q$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint_\sigma f(Q)\ln\left(\frac{R(\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}{(R^4+\rho^2\rho_0^2-2R^2\rho\rho_0\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\right)d\sigma_Q$$

与

$$u(P)=\frac{1}{2\pi R}\int_L\varphi(Q)\frac{R^2-\rho^2}{r_{PQ}^2}ds_Q$$

例 4.10 利用格林函数法求解拉普拉斯方程狄里赫利问题

$$\begin{cases}\Delta_2u=0, & (x^2+y^2<R^2,y>0)\\ u|_L=\begin{cases}1 & \text{当 } x^2+y^2=R^2,y>0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } -R\leqslant x\leqslant R,y=0 \text{ 时}\end{cases}\end{cases}$$

的解.

解 首先,不难求得拉普拉斯方程关于半圆域的格林函数为

$$G(P,Q)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PQ}}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho r_{PQ_1}}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PQ_2}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho r_{PQ_3}}$$

其中,$P=P(x,y),Q=Q(\xi,\eta),Q_2=Q_2(\xi,-\eta),Q_1$ 与 Q_3 分别为 Q 与 Q_2 关于圆周 $x^2+y^2=R^2$ 的反演点,$\rho=r_{OQ}=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$(如图 4-10).若记 $\rho_0=r_{OP},\rho_1=r_{OQ_1},\angle POQ=\theta$,$OQ$ 与 X 轴正方向的夹角为 φ,则按余弦定理不难求得

$$G(P,Q)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\theta}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\sqrt{\rho_0^2\rho^2+R^4-2\rho_0\rho R^2\cos\theta}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\theta+2\varphi)}}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\sqrt{\rho_0^2\rho^2+R^4-2\rho_0\rho R^2\cos(\theta+2\varphi)}}$$

于是

$$\left.\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_p}\right|_{\rho_0=R}=\left.\frac{\partial G}{\partial\rho_0}\right|_{\rho_0=R}=\frac{1}{2\pi R}(R^2-\rho^2)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\rho^2+R^2-2\rho R\cos\theta}-\frac{1}{\rho^2+R^2-2\rho R\cos(\theta+2\varphi)}\right)$$

故，由(4-79)式得

$$u(P)=\int_L 1\cdot\frac{\partial G(Q,P)}{\partial n_Q}ds_Q=\frac{1}{2\pi R}\int_L(R^2-\rho^2)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\rho^2+R^2-2\rho R\cos\theta}-\frac{1}{\rho^2+R^2-2\rho R\cos(\theta+2\varphi)}\right)ds_Q$$

其中，L 为 $x^2+y^2=R^2, y=0$. 注意到上述积分表达式与上面所计算的$\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_p}$中的 P,Q 的位置恰好对调，所以，此时被积函数中的 $\rho=r_{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$. 若采用极坐标 $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi\ (0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，则 $\xi=R\cos(\varphi+\theta)$，$\eta=R\sin(\varphi+\theta)$，再记 $t=\varphi+\theta$，则 $ds_Q=Rdt$，于是，所求的解又可简化为

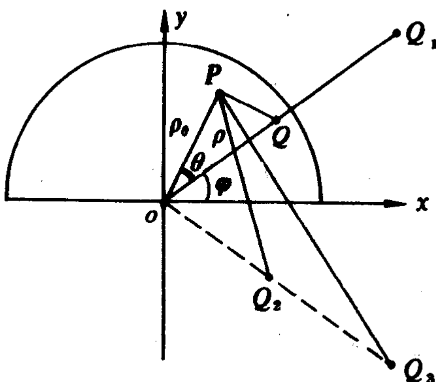


图 4-10

$$u(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(R^2-\rho^2)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\rho^2+R^2-2\rho R\cos(t-\varphi)}-\frac{1}{\rho^2+R^2-2\rho R\cos(t+\varphi)}\right]dt$$

同样不难求得二维拉普拉斯方程关于半平面 $y>0$ 的格林函数为

$$G(P,Q)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PQ}}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PQ_1}}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}}$$

式中 Q_1 为 $Q(\xi,\eta)$关于直线 $y=0$ 的对称点，即 $Q=Q(\xi,-\eta)$. 于是，易得 $G(P,Q)$于 $y=0$ 上点 $P(x,y)$处沿该曲线的外法线方向的微商为

$$\left.\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\right|_{y=0}=\frac{\eta}{\pi[(x-\xi)^2+\eta^2]}$$

据此及(4-78)、(4-79)二式可知，定解问题(A)与(D)的解分别为

$$u(P)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,0)\frac{y}{[(\xi-x)^2+y^2]}d\xi$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)\ln\left[\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{(\xi-x)^2+(\eta+y)^2}\right]d\eta$$

与

$$u(P)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,0)\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi \qquad (4\text{-}81)$$

鉴于格林函数于所论区域内部的表达式，通常比较复杂，完全类似于三维情形，也可以引进所谓特解法，此处不再赘述. 仅举一个例子以表示该方法的应用.

例 4.11　利用格林函数法，求解泊松方程狄里赫利问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=2e^{-y}+2\cos 2x+y & (-\infty<x<+\infty,y>0)\\ u|_{y=0}=2 & (-\infty<x<+\infty)\end{cases} \qquad (4\text{-}82)$$

的解.

解　首先按特解法，不难求得方程(4-82)的一个特解为

$$v(x,y) = 2e^{-y} + \sin^2 x + \frac{1}{6}y^3$$

令

$$u = v + w \tag{4-83}$$

则

$$\begin{cases} \Delta_2 w = 0 \\ w\big|_{y=0} = -\sin^2 x \qquad (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

按公式(4-81),得

$$w(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\sin^2\xi}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi$$

再根据(4-83)式,立即得原定解问题的解为

$$u(x,y) = \sin^2 x + 2e^{-y} + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\sin^2\xi}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi$$

类比三维情形不难看出,这里所谓改进的格林函数法,其改进之处,仍如三维情形所作的说明,故不再重复.

§4.3 混合问题的 Green 函数与 Green 函数法

在§4.1中,我们已经详细叙述了含热传导方程与波动方程初值问题的格林函数和格林函数法.那时,所论定解问题的一个重要特点,就是其中所含的空间变量皆为双向无界的变量.因此,定解问题中只含初始条件,而不显含边界条件.

本节则讨论热传导方程或波动方程的另一类定解问题的格林函数法.该定解问题中所含空间变量并非都是双向无界的,从而,定解问题中,不仅含有初始条件,也显含边界条件.这就是所谓的混合问题.

下面以三维热传导方程的混合问题为例,来简述其格林函数概念及格林函数法,考虑

$$
(A)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta_3 u+f(x,y,z,t) & (x,y,z)\in\Omega,t>0\\ u|_\Gamma=\varphi(x,y,z,t) & (t\geqslant 0)\\ u|_{t=0}=\psi(x,y,z,t) & (x,y,z)\in\Omega\end{cases}
$$

按§4.1的定义4.1,我们自然定义定解问题

$$
(B)\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=a^2\Delta_3 G+\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta,t-\tau)\\ \qquad\qquad (x,y,z)\in\Omega,t>0\\ G|_\Gamma=0 & (t\geqslant 0)\\ G|_{t=0}=0 & (x,y,z)\in\Omega\end{cases}
$$

的解 $G=G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)$ 为三维热传导方程(关于区域 Ω 满足第一边界条件)混合问题的格林函数或基本解.

该格林函数的物理意义是很明显的,它表示瞬时点热源所导致的热传导过程.从而也称之为点源函数.

按照与杜哈美原理的物理论证类似的推理过程,不难证明,求解定解问题(B)可以归结为求解定解问题

$$
(C)\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=a^2\Delta_3 G & (x,y,z)\in\Omega,t>\tau>0\\ G|_\Gamma=0 & (t\geqslant\tau>0)\\ G|_{t=\tau}=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta) & (x,y,z)\in\Omega\end{cases}
$$

求解定解问题(C),又可直接归结为求解

$$
(D)\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=a^2\Delta_3 G & (x,y,z)\in\Omega,t>0\\ G|_\Gamma=0 & (t\geqslant 0)\\ G|_{t=0}=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta) & (x,y,z)\in\Omega\end{cases}
$$

事实上,将(D)的解 $G=G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)$ 中的 t 换为 $t-\tau$,便得到(C)的解.显然,(D)的解为(C)的解 $G=G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)$ 中之 $\tau=0$ 的情形.

为借助于求得的格林函数,按照迭加原理以及基于迭加原理建立的杜哈美原理,来求解定解问题(A).若(A)含非齐次边界条件,当然应该通过适当变换,先将(A)化为含齐次边界条件的定解问题,以使得迭加原理可行.亦即,若(A)中 $\varphi(x,y,z,t)\neq 0$,则于 Ω 的边界 Γ

上取值为 $\varphi(x,y,z,t)$ 的适当光滑的函数[*]有无穷多个，自然取其中结构最简单的函数，记之为 $v=v(x,y,z,t)$. 从而，函数

$$w=u-v \tag{4-84}$$

满足

$$(E)\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\Delta_3 w+F(x,y,z,t) & (x,y,z)\in\Omega,t>0\\ w|_\Gamma=0 & (t\geqslant 0)\\ w|_{t=0}=\Psi(x,y,z) & (x,y,z)\in\Omega\end{cases}$$

其中

$$F(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+a^2\Delta_3 v(x,y,z,t)-\frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial t}$$

$$\Psi(x,y,z)=\psi(x,y,z)-v(x,y,z,0)$$

按迭加原理，为了求解(E)，只须求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_1}{\partial t}=a^2\Delta_3 w_1+F(x,y,z,t) & (x,y,z)\in\Omega,t>0)\\ w_1|_\Gamma=0 & (t\geqslant 0)\\ w_1|_{t=0}=0 & (x,y,z)\in\Omega\end{cases}$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_2}{\partial t}=a^2\Delta_3 w_2 & (x,y,z)\in\Omega,t>0\\ w_2|_\Gamma=0 & (t\geqslant 0)\\ w_2|_{t=0}=\Psi(x,y,z) & (x,y,z)\in\Omega\end{cases}$$

并且

$$w=(x,y,z,t)=w_1(x,y,z,t)+w_2(x,y,z,t) \tag{4-85}$$

由 δ-函数的运算性质可知

$$F(x,y,z,t)=\int_0^t d\tau\iiint\limits_\Omega F(\xi,\eta,\zeta,\tau)\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta,t-\tau)d\xi d\eta d\zeta$$

---

[*] 这里所谓适当光滑的函数，是指对 x,y,z 的二阶偏微商存在，对 t 的一阶偏微商存在的函数.

再按格林函数 $G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)$ 为 (B) 的解，且根据迭加原理可得

$$w_1(x,y,z,t)=\int_0^t d\tau\iiint_\Omega F(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)d\xi d\eta d\zeta$$

根据同样的道理，再注意到 $G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)$ 也是 (D) 的解，所以

$$w_2(x,y,z,t)=\iiint_\Omega \Psi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)d\xi d\eta d\zeta$$

再由(4-84)、(4-85)式便得定解问题(A)的解为

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)=&\int_0^t d\tau\iiint_\Omega F(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)d\xi d\eta d\zeta\\&+\iiint_\Omega \Psi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)d\xi d\eta d\zeta\\&+v(x,y,z,t)\end{aligned}\tag{4-86}$$

上述通过求格林函数，并利用迭加原理，求得三维热传导方程的混合问题的解的方法，称为求解三维热传导方程混合问题的格林函数法，或称点源函数法.

至于波动方程的混合问题的格林函数与格林函数法，则可以仿此类似地阐述，下面我们以三维定解问题

$$(F)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta_3 u+f(x,y,z,t) & (x,y,z)\in\Omega,t>0\\ u|_\Gamma=\chi(x,y,z,t) & (t\geqslant 0)\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x,y,z) & \\ & (x,y,z)\in\Omega\end{cases}$$

为例，予以扼要地说明.

我们称

$$(H)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}=a^2\Delta_3 G+\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta,t-\tau) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,y,z)\in\Omega,t>0 \\ G|_\Gamma=0 \qquad (t>0) \\ G|_{t=0}=0,\quad \dfrac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \qquad (x,y,z)\in\Omega\end{cases}$$

的解 $G=G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)$ 为三维波动方程(关于区域 Ω 满足第一边界条件)混合问题的格林函数或基本解，在物理上，它表征瞬时点源所导致的波动过程. 从而，也称为点源函数.

显然，求解 (H) 可归结为求解

$$(I)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}=a^2\Delta_3 G \qquad (x,y,z)\in\Omega,t>\tau\geqslant 0 \\ G|_\Gamma=0 \qquad (t\geqslant\tau>0) \\ G|_{t=\tau}=0,\quad \dfrac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta) \\ \qquad\qquad\qquad (x,y,z)\in\Omega\end{cases}$$

若定解问题 (F)，含有非齐次边界条件，则为使迭加原理可行，应当将 (F) 化为含齐次边界条件的定解问题. 为此，任取对 x,y,z,t 的二阶偏导数皆存在，于 Ω 的边界 Γ 上取值为 $\varphi(x,y,z,t)$，且结构简单的函数 $v=v(x,y,z,t)$. 若令

$$w=u-v \tag{4-87}$$

则有

$$(J)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\Delta_3 w+F(x,y,z,t) \qquad (x,y,z)\in\Omega,t>0 \\ w|_\Gamma=0 \qquad (t\geqslant 0) \\ w|_{t=0}=\Phi(x,y,z),\quad \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=\Psi(x,y,z) \\ \qquad\qquad\qquad (x,y,z)\in\Omega\end{cases}$$

其中

$$F(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+a^2\Delta_3 v(x,y,z,t)-\frac{\partial^2 v(x,y,z,t)}{\partial t^2}$$

$$\Phi(x,y,z)=\varphi(x,y,z)-v(x,y,z,0)$$

$$\Psi(x,y,z)=\psi(x,y,z)-\frac{\partial v(x,y,z,0)}{\partial t}$$

按迭加原理，可将定解问题(J)，分解为如下三个定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}=a^2\Delta_3 w_1+F(x,y,z,t) & (x,y,z)\in\Omega,t>0\\ w_1|_{\Gamma}=0 & (t\geqslant 0)\\ w_1|_{t=0}=0,\left.\dfrac{\partial w_1}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & (x,y,z)\in\Omega\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}=a^2\Delta_3 w_2 & (x,y,z)\in\Omega,t>0\\ w_2|_{\Gamma}=0 & (t\geqslant 0)\\ w_2|_{t=0}=0,\left.\dfrac{\partial w_2}{\partial t}\right|_{t=0}=\Psi(x,y,z) & (x,y,z)\in\Omega\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w_3}{\partial t^2}=a^2\Delta_3 w_3 & (x,y,z)\in\Omega,t>0\\ w_3|_{\Gamma}=0 & (t\geqslant 0)\\ w_3|_{t=0}=\Phi(x,y,z),\left.\dfrac{\partial w_3}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & (x,y,z)\in\Omega\end{cases}$$

并且

$$W(x,y,z,t)=w_1(x,y,z,t)+w_2(x,y,z,t)+w_3(x,y,z,t)$$

据此以及(H)，(J)再按 δ-函数的运算性质、迭加原理及初位移化初速原理，不难求出定解问题(J)的解. 最后由(4-87)式便得到定解问题(F)的解为

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)=&\int_0^t d\tau\iiint_{\Omega}F(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)d\xi d\eta d\zeta\\&+\iiint_{\Omega}\Psi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)d\xi d\eta d\zeta\\&+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)d\xi d\eta d\zeta\end{aligned}$$

$$+v(x,y,z,t) \tag{4-88}$$

上述方法便称为求解三维波动方程混合问题的格林函数法，或称为点源函数法.

讨论完三维情形之后，对于一维与二维的情形可知是完全类似的. 而且，对于一维情形，无论所含空间变量为有界的还是半无界的，由于按格林函数法所求得的解的表达式，只含所论格林函数关于空间变量的单积分. 因此，解的结构较高维情形要简捷得多，并且所含积分常常可以计算出来，从而，格林函数法也更便于应用. 读者从下面几个例子足以能看出来这一点.

例 4.12 用格林函数法求解

$$(K)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<1,t>0) \\ u|_{x=0}=0, u|_{x=1}=\sin 2t & (t\geqslant 0) \\ u|_{t=0}=0, \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=2 & (0\leqslant x\leqslant 1) \end{cases}$$

的解

解 首先求格林函数，即求

$$(L)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\delta(x-\xi,t-\tau) & (0<x<1,t>0) \\ G|_{x=0}=0, G|_{x=1}=0 & (t\geqslant 0) \\ G|_{t=0}=0, \left.\dfrac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & (0\leqslant x\leqslant 1) \end{cases}$$

的解 $G=G(x,\xi,t-\tau)$. 按照类似于杜哈美原理的物理论证的推理过程，不难证明该问题可以化为

$$(M)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & (0<x<1,t>\tau>0) & (4\text{-}89) \\ G|_{x=0}=0, G|_{x=1}=0, & (t\geqslant \tau>0) & (4\text{-}90) \\ G|_{t=\tau}=0, \left.\dfrac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=\tau}=\delta(x-\xi) & (0\leqslant x\leqslant 1) & (4\text{-}91) \end{cases}$$

根据分离变量法，不难求得方程(4-89)式满足(4-90)式的解为

$$G_k(x,\xi,t-\tau)=\{a_k(\xi,\tau)\cos[k\pi a(t-\tau)]$$

$$+ b_k(\xi,\tau)\sin[k\pi a(t-\tau)]\}\sin k\pi x$$

其中 $a_k(\xi,\tau),b_k(\xi,\tau)(k=1,2\cdots)$为待定函数,$a$ 为方程(4-89)式中的常数. 按迭加原理得

$$G(x,\xi,t-\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k(\xi,\tau)\cos[k\pi a(t-\tau)]$$

$$+ b_k(\xi,\tau)\sin[k\pi a(t-\tau]\}\sin k\pi x \qquad (4\text{-}92)$$

为使(4-92)式还满足(4-91)式,则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\xi,\tau)\sin k\pi x=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\pi a b_k(\xi,\tau)\sin k\pi x=\delta(x-\xi)$$

由傅氏级数理论可得

$$a_k(\xi,\tau)=0 \qquad (k=1,2\cdots)$$

$$b_k(\xi,\tau)=\frac{2}{k\pi a}\int_0^1\delta(x-\xi)\sin k\pi x dx$$

$$=\frac{2}{k\pi x}\sin k\pi\xi \qquad (k=1,2,\cdots)$$

代入(4-92)式便得格林函数为

$$G(x,\xi,t-\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi a}\sin(k\pi\xi)\sin[k\pi a(t-\tau)]\sin k\pi x \quad (4\text{-}93)$$

其次,再借助于该格林函数,来求解定解问题(K). 为此,先将其所含的非齐次边界条件,化为齐次边界条件. 只须设 $v(x,t)=x\sin 2t$,并令

$$w=u-x\sin 2t \qquad (4\text{-}94)$$

则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4x\sin 2t & (0<x<1,t>0)\\ w|_{x=0}=0,\quad w|_{x=1}=0 & (t\geqslant 0)\\ w|_{t=0}=0,\dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=2(1-x) & (0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

按迭加原理,要求该定解问题的解 $w=w(x,t)$,只须解定解问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - 4x\sin 2t & (0 < x < 1, t > 0) \\
w_1\big|_{x=0} = 0, w_1\big|_{x=1} = 0 & (t \geqslant 0) \\
w_1\big|_{t=0} = 0, \dfrac{\partial w_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 & (0 \leqslant x \leqslant 1)
\end{cases}
$$

与

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} & (0 < x < 1, t > 0) \\
w_2\big|_{x=0} = 0, w_2\big|_{x=1} = 0 & (t \geqslant 0) \\
w_2\big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial w_2}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2(1 - x) & (0 \leqslant x \leqslant 1)
\end{cases}
$$

并且

$$
w(x,t) = w_1(x,t) + w_2(x,t) \tag{4-95}
$$

注意格林函数(4-93)式是定解问题(L)的解，于是按迭加原理及δ-函数的运算性质，易得

$$
\begin{aligned}
w_1(x,t) &= \int_0^t d\tau \int_0^1 (-4\xi\sin 2\tau) G(x,\xi,t-\tau) d\xi \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{8}{k\pi a}\right) \left\{\int_0^t \sin[k\pi a(t-\tau)]\right. \\
&\quad \left.\cdot \sin 2\tau d\tau \int_0^1 \xi \sin k\pi\xi d\xi\right\} \sin k\pi x \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 8}{(k\pi)^2 a} \cdot \frac{k\pi a \sin 2t - 2\sin k\pi a t}{(k\pi a)^2 - 4} \sin k\pi x
\end{aligned}
$$

由于格林函数(4-93)式也是定解问题(M)的解，于是按迭加原理及δ-函数的运算性质可得

$$
\begin{aligned}
w_2(x,t) &= \int_0^1 2(1-\xi) G(x,\xi,t) d\xi \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi a} \left\{\int_0^1 (1-\xi) \sin k\pi\xi d\xi\right\} \sin k\pi a t \sin k\pi x \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4}{(k\pi)^2 a} \sin(k\pi a t) \sin k\pi x
\end{aligned}
$$

故，按(4-94)、(4-95)式可得定解问题(K)的解为

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k4}{(k\pi)^2a}\Big[\frac{2}{(k\pi a)^2-4}(k\pi a\sin 2t-2\sin k\pi at)+\sin k\pi at\Big]\sin k\pi x+x\sin 2t$$

例 4.18　用格林函数法求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin t\cos\pi x & (0<x<1,t>0)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1}=0; & (t\geqslant 0)\\ u|_{t=0}=\cos 2\pi x,\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 & (0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

的解.

解　虽然这里涉及的定解问题含有第二类边界条件,不过我们从以下的讨论中将看到,当用格林函数法求解这类问题时,与求解含第一边界条件的定解问题,无论是方法原则,还是具体步骤,都是类似的.

首先,求一维波动方程(关于区间 $0<x<1$,满足第二边界条件)混合问题的格林函数. 按 § 4.1 的定义 4.1,即求定解问题

$$(N)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\delta(x-\xi,t-\tau) & (0<x<1,t>0)\\ \dfrac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=1}=0 & (t\geqslant 0)\\ G|_{t=0}=0,\dfrac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 & (0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

的解 $G=G(x,\xi,t-\tau)$. 显然,如上所述,此定解问题可化为

$$(P)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & (0<x<1,t>\tau>0) & (4\text{-}96)\\ \dfrac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=1}=0 & (t\geqslant\tau>0) & (4\text{-}97)\\ G|_{t=\tau}=0,\dfrac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=\delta(x-\xi) & (0\leqslant x\leqslant 1) & (4\text{-}98)\end{cases}$$

依据分离变量法,可求得方程(4-96)式满足边界条件(4-97)式的解的一般形式为

$$G(x,\xi,t-\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}[a_k(\xi,\tau)\cos k\pi a(t-\tau)$$

$$+b_k(\xi,\tau)\sin k\pi a(t-\tau)]\cos k\pi x \qquad (4\text{-}99)$$

其中 $a_k(\xi,\tau)(k=0,1,2\cdots)$,$b_k(\xi,\tau)(k=1,2\cdots)$是由初始条件(4-98)式所确定的待定函数.$a$ 为方程(4-96)式中的常数(以下同).

将(4-99)式代入(4-98)式得

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\xi,\tau)\cos k\pi x=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\pi a b_k(\xi,\tau)\cos k\pi x=\delta(x-\xi)$$

由傅氏级数理论可得

$$a_k(\xi,\tau)=0 \qquad (k=0,1,2\cdots)$$

$$b_k(\xi,\tau)=\frac{2}{k\pi a}\int_0^1\delta(x-\xi)\cos k\pi x dx$$

$$=\frac{2}{k\pi a}\cos k\pi\xi \qquad (k=1,2,\cdots)$$

再将其代入(4-99)式便得所求的格林函数为

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{2}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\pi a(t-\tau)\cos k\pi\xi\cos k\pi x \quad (4\text{-}100)$$

其次,为求原定解问题,只须求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\sin t\cos\pi x & (0<x<1,t>0)\\ \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=1}=0 & (t\geqslant 0)\\ u_1\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 & (0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} & (0<x<1,t>0)\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=1}=0 & (t\geqslant 0)\\ u_2\big|_{t=0}=\cos 2\pi x,\dfrac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 & (0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

并且

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

因为(4-100)式中的 $G(x,\xi,t-\tau)$是定解问题(N)的解，所以，按迭加原理及 δ-函数的运算性质，可得

$$u_1(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 \sin\tau\cos\pi\xi G(x,\xi,t-\tau)d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\int_0^t \sin\tau\sin k\pi a(t-\tau)d\tau\int_0^1 \cos\pi\xi\cos k\pi\xi d\xi\right]\cos k\pi x$$

由于函数系$\{\cos k\pi\xi\}_{k=1}^{\infty}$于区间$[0,1]$上的直交性，可知

$$\int_0^1 \cos\pi\xi\cos k\pi\xi d\xi = 0 \qquad (\text{当 } k \neq 1 \text{ 时})$$

而

$$\int_0^1 \cos^2(\pi\xi)d\xi = \frac{1}{2}$$

于是

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\pi a}\left[\int_0^t \sin\tau\sin\pi a(t-\tau)d\tau\right]\cos\pi x$$

$$= \frac{1}{\pi a(1-\pi^2a^2)}[\sin\pi at - \pi a\sin t]\cos\pi x$$

又由于格林函数(4-100)式也是定解问题(P)的解，所以，同理可得

$$u_2(x,t) = \int_0^1 \cos 2\pi\xi G(x,\xi,t)d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\int_0^1 \cos 2\pi\xi\cos k\pi\xi d\xi\right]\sin k\pi at\cos k\pi x$$

又

$$\int_0^1 \cos 2\pi\xi\cos k\pi\xi d\xi = \begin{cases} 0 & \text{当 } k \neq 2 \text{ 时} \\ \frac{1}{2} & \text{当 } k = 2 \text{ 时} \end{cases}$$

于是

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\sin 2\pi at\cos 2\pi x$$

故，所求的原定解问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_1(x,t) + u_2(x,t) \\
&= \frac{1}{a\pi(1-\pi^2a^2)}[\sin\pi at - \pi a\sin t]\cos\pi x \\
&\quad + \frac{1}{2\pi a}\sin 2\pi at\cos 2\pi x
\end{aligned}
$$

例 4.14 试用格林函数法求如下定解问题的解

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & (x>0,t>0) \\
u|_{x=0} = \psi(t) & (t\geqslant 0) \\
u|_{t=0} = \varphi(x) & (x\geqslant 0)
\end{cases}
$$

解 首先将该定解问题中的非齐次边界条件化为齐次边界条件，为此，取 $v=\psi(t)$，则 $w=u-v$，并且它满足

$$
(Q)\begin{cases}
\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F(x,t) & (x>0,t>0) \\
w|_{x=0} = 0 & (t\geqslant 0) \\
w|_{t=0} = \Phi(x) & (x\geqslant 0)
\end{cases}
$$

其中 $F(x,t)=f(x,t)-\psi'(t)$， $\Phi(x)=\varphi(x)-\psi(0)$

以下我们利用格林函数法，通过两种途径来求定解问题(Q).

〔方法一〕 无妨把定解问题(Q)所描述的半无界杆的热传导问题，看作是某根双向无界的杆的热传导之相应于 $x\geqslant 0$ 的部分. 为此，必须相应地把温度函数 $w(x,t)$对空间变量 x 作开拓，使之于$-\infty<x<+\infty,t\geqslant 0$ 上有定义. 鉴于由(N)所描述的杆的热传导过程中，点 $x=0$ 处的温度始终为零，于是按问题的物理意义，显然可知当把温度函数 w 对空间变量 x 作开拓时，必须作奇开拓. 换言之，开拓后的函数 $\widetilde{w}$ 对空间变量 x 而言必须是奇函数，从而，开拓后的温度函数所满足的热传导问题的热源函数，以及初始温度函数，对空间变量 x 而言都应是奇函数. 因此，我们转而考虑如下无界杆的热传导问题

$$
(Q')\begin{cases}
\dfrac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial x^2} + \widetilde{F}(x,t) & (-\infty<x<+\infty,t>0) \\
\widetilde{w}|_{t=0} = \widetilde{\Phi}(x) & (-\infty<x<+\infty)
\end{cases}
$$

其中

$$\tilde{w}(x,t)=\begin{cases}w(x,t) & (0\leqslant x<+\infty)\\ -w(-x,t) & (-\infty<x<0)\end{cases}$$

$$\tilde{F}(x,t)=\begin{cases}F(x,t) & (0\leqslant x<+\infty)\\ -F(-x,t) & (-\infty<x<0)\end{cases}$$

$$\tilde{\Phi}(x,t)=\begin{cases}\Phi(x,t) & (0\leqslant x<+\infty)\\ -\Phi(-x,t) & (-\infty<x<0)\end{cases}$$

按定义，一维热传导方程初值问题的格林函数是定解问题

$$(R)\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\delta(x-\xi,t-\tau)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ G|_{t=0}=0 \qquad\qquad (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

的解 $G=G(x,\xi,t-\tau)$. 不言而喻，此格林函数显然也满足

$$(S)\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>\tau\geqslant 0)\\ G|_{t=\tau}=\delta(x-\xi) & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

由(4-12)式可知，所求的格林函数为

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)} \tag{4-101}$$

由于(4-101)既是(R)也是(S)的解，再根据迭加原理以及 δ-函数的运算性质，可求得定解问题(Q′)的解为

$$\begin{aligned}\tilde{w}(x,t)=&\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(\xi,\tau)e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}d\xi\\ &+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Phi}(\xi)e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}d\xi\\ =&\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\int_{-\infty}^0[-F(-\xi,\tau)]e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}d\xi\right.\\ &\left.+\int_0^{+\infty}F(\xi,\tau)e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}d\xi\right\}\\ &+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_{-\infty}^0[-\Phi(-\xi)]e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}d\xi\right.\end{aligned}$$

$$+\int_0^{+\infty}\Phi(\xi)e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}d\xi\Big\}$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}F(\xi,\tau)\left[e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}-e^{-(x+\xi)^2/4a^2(t-\tau)}\right]d\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\Phi(\xi)\left[e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}-e^{-(x+\xi)^2/4a^2t}\right]d\xi$$

由于当 $x\geqslant0$ 时，$\widetilde{w}(x,t)=w(x,t)$，再根据 $u=w+\psi(t)$ 可知原定解问题之解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\pi^{1/2}}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}\int_0^{+\infty}F(\xi,\tau)\left[e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}-e^{-(x+\xi)^2/4a^2(t-\tau)}\right]d\xi$$

$$+\frac{1}{2a(\pi t)^{1/2}}\int_0^{+\infty}\Phi(\xi)\left[e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}-e^{-(x+\xi)^2/4a^2t}\right]d\xi \qquad (4\text{-}102)$$

〔方法二〕 为按格林函数法求解定解问题(Q)，首先来求一维热传导方程(关于半无界区间 $x>0$，满足第一边界条件)混合问题的格林函数. 依据定义，即求定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\delta(x-\xi,t-\tau) & (x>0,t>0)\\ G|_{x=0}=0 & (t\geqslant0)\\ G|_{t=0}=0 & (x\geqslant0)\end{cases}$$

的解 $G=G(x,\xi,t-\tau)$. 同理，此定解问题可以化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & (x>0,t>\tau>0)\\ G|_{x=0}=0 & (t\geqslant\tau>0)\\ G|_{t=\tau}=\delta(x-\xi) & (x\geqslant0)\end{cases}$$

和方法一同样来考虑

$$(T)\begin{cases}\dfrac{\partial G_1}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>\tau>0)\\ G_1|_{t=\tau}=\delta_1(x-\xi) & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

其中

$$G_1(x,\xi,t-\tau)=\begin{cases}G(x,\xi,t-\tau) & (0\leqslant x<+\infty)\\ -G(-x,\xi,t-\tau) & (-\infty<x<0)\end{cases}$$

$$\delta_1(x-\xi)=\begin{cases}\delta(x-\xi) & (0\leqslant x<+\infty)\\ -\delta(-x-\xi) & (-\infty<x<0)\end{cases}$$

若记 G_1 对 x 取傅氏变换为

$$F[G_1(x,\xi,t)]=\widetilde{G}_1(\lambda,\xi,t)$$

再由 $\delta_1(x-\xi)$对 x 的傅氏变换为

$$\begin{aligned}F[\delta(x-\xi)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}\delta_1(x-\xi)dx\\&=\int_{-\infty}^{0}[-\delta(-x-\xi)]e^{-i\lambda x}dx+\int_{0}^{+\infty}\delta(x-\xi)e^{-i\lambda x}dx\\&=\int_{+\infty}^{0}\delta(x-\xi)e^{i\lambda x}dx+\int_{0}^{+\infty}\delta(x-\xi)e^{-i\lambda x}dx\\&=\int_{0}^{+\infty}[e^{-i\lambda x}-e^{i\lambda x}]\delta(x-\xi)dx\\&=e^{-i\lambda\xi}-e^{i\lambda\xi}=-2i\sin\lambda\xi\end{aligned}$$

则把定解问题(T)中的方程及初始条件的两端对 x 取傅氏变换便得

$$\begin{cases}\dfrac{d\widetilde{G}_1}{dt}=-a^2\lambda^2\widetilde{G}_1\\ \widetilde{G}_1\big|_{t=\tau}=-2i\sin\lambda\xi\end{cases}$$

解此常微分方程初值问题，得

$$\widetilde{G}_1=-2i\sin\lambda\xi e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}$$

于是，(T)的解为

$$\begin{aligned}G_1(x,\xi,t-\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{G}_1(\lambda,\xi,t-\tau)e^{i\lambda x}d\lambda\\&=-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\lambda\xi(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}d\lambda\end{aligned}$$

注意到上述积分中被积函数的奇偶性可知*

$$G_1(x,\xi,t-\tau)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin\lambda\xi\sin\lambda x e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}d\lambda$$

---

* 利用积分号下对参变量求微商的方法，可计算含参变量的积分为

$$I(\eta)=\int_{0}^{+\infty}e^{-b^2y^2}\cos\eta y dy=\frac{\pi^{1/2}}{2b}e^{-\eta^2/4b^2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[\cos\lambda(x-\xi)-\cos\lambda(x+\xi)]e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}[e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}-e^{-(x+\xi)^2/4a^2(t-\tau)}]$$

于是，当 $x\geqslant0$ 时，得到所求的格林函数为

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}[e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}-e^{-(x+\xi)^2/4a^2(t-\tau)}] \tag{4-103}$$

其次，再根据迭加原理以及 δ-函数的运算性质，可得定解问题 (Q) 的解为

$$w(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^{+\infty}F(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)d\xi$$

$$+\int_0^{+\infty}\Phi(\xi)G(x,\xi,t)d\xi$$

最后由 $u=w+\psi(t)$ 及格林函数 $G(x,\xi,t-\tau)$ 的表达式(4-103)式，便可立即得到原定解问题的解(4-102)式.

例 4.15 试用格林函数法求定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2} & (x>0,t>0)\\ u|_{x=0}=0 & (t\geqslant0)\\ u|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sin x & (x\geqslant0)\end{cases}$$

的解.

解 应用格林函数法，我们还是通过两种途径来解该问题.

〔方法一〕 不妨把所求定解问题描述的半无界弦振动问题，当作某根双向无界弦之相应于 $x\geqslant0$ 的部分. 为此，必须相应地把位移函数 $u(x,t)$ 对空间变量 x 作开拓，使之于 $-\infty<x<+\infty,t\geqslant0$ 上有意义. 鉴于该弦在振动过程中，于点 $x=0$ 处始终保持不动，所以，按问题的物理意义，显然可知，$u(x,t)$ 应当对空间变量 x 作奇开拓，从而，开拓后的位移函数所满足的波动问题的初速度函数，对空间变量 x 而言，也应当是奇函数. 因此，我们考虑如下无界弦的振动问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ \tilde{u}\big|_{t=0} = 0, \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty)\end{cases}$$

其中

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases}u(x,t) & (0 \leqslant x < +\infty) \\ -u(-x,t) & (-\infty < x < 0)\end{cases}$$

$$\psi(x) = \sin x \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

于是，仿照§4.1的例4.2，用格林函数法，不难求得一维波动方程初值问题的解为

$$\tilde{u}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) G(x,\xi,t) d\xi$$

其中，G 为一维波动方程初值问题的格林函数

$$G(x,\xi,t) = \begin{cases}\dfrac{1}{2a} & \text{当 } |x-\xi| \leqslant at \\ 0 & \text{当 } |x-\xi| > at\end{cases}$$

故所求定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \sin\xi d\xi + \frac{1}{2a}[\cos(x-at) - \cos(x+at)]$$

〔方法二〕 为按格林函数法求解原定解问题，先来求一维波动方程（关于半无界区间 $x>0$ 满足第一边界条件）混合问题的格林函数，依据定义，即求

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \delta(x-\xi, t-\tau) & (x > 0, t > 0) \\ G\big|_{x=0} = 0 & (t \geqslant 0) \\ G\big|_{t=0} = 0, \dfrac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 & (x \geqslant 0)\end{cases}$$

的解 $G=G(x,\xi,t-\tau)$. 如所熟知，此定解问题可以化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & (x > 0, t > \tau \geqslant 0) \\ G\big|_{x=0} = 0 & (t \geqslant 0) \\ G\big|_{t=\tau} = 0, \dfrac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = \delta(x-\xi) & (x \geqslant 0)\end{cases}$$

仿照方法一开头的处理方法，考虑

$$
(U)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>\tau>0)\\ G_1|_{t=\tau}=0,\left.\dfrac{\partial G_1}{\partial t}\right|_{t=\tau}=\delta_1(x-\xi) & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}
$$

其中

$$
G_1(x,\xi,t-\tau)=\begin{cases}G(x,\xi,t-\tau) & (0\leqslant x<+\infty)\\ -G(-x,\xi,t-\tau) & (-\infty<x<0)\end{cases}
$$

$$
\delta_1(x-\xi)=\begin{cases}\delta(x-\xi) & (0\leqslant x<+\infty)\\ -\delta(-x-\xi) & (-\infty<x<0)\end{cases}
$$

记 $G_1(x,\xi,t-\tau)$ 对 x 取傅氏变换为

$$
F[G_1(x,\xi,t-\tau)]=\widetilde{G}(\lambda,\xi,t-\tau)
$$

把定解问题 (U) 中的方程及初始条件的两端，对 x 取傅氏变换得

$$
\begin{cases}\dfrac{d^2\widetilde{G}_1}{dt^2}=-a^2\lambda^2\widetilde{G}_1\\ \widetilde{G}_1|_{t=\tau}=0,\left.\dfrac{d\widetilde{G}_1}{dt}\right|_{t=\tau}=F[\delta_1(x-\xi)]\end{cases}
$$

解此常微分方程，得

$$
\widetilde{G}_1=\frac{1}{a\lambda}\sin(a\lambda t)F[\delta_1(x-\xi)]
$$

如 § 4.1 的例 4.2 所指出的，若记

$$
f_\tau(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & |x|\leqslant a(t-\tau)\\ 0 & |x|>a(t-\tau)\end{cases}
$$

则

$$
\begin{aligned}
G_1(x,\xi,t-\tau)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_\tau(\eta)\delta_1(x-\eta-\xi)d\eta\\
&=-\int_{-\infty}^{0}f_\tau(\eta)\delta(-x-\xi-\eta)d\eta\\
&\quad+\int_{0}^{+\infty}f_\tau(\eta)\delta(x-\eta-\xi)d\eta\\
&=f_\tau(x-\xi)-f_\tau(x+\xi)
\end{aligned}
$$

据此,所求的格林函数为

$$G(x,\xi,t-\tau)=f_\tau(x-\xi)-f_\tau(x+\xi)$$

故,所求的解为

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}G(x,\xi,t)\sin\xi d\xi$$

$$=\int_0^{+\infty}f_0(x-\xi)\sin\xi d\xi-\int_0^{+\infty}f_0(x+\xi)\sin\xi d\xi \qquad (4\text{-}104)$$

注意到

$$f_0(x-\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & x-at\leqslant\xi\leqslant x+at\\ 0 & \xi>x+at \text{ 或 } \xi<x-at\end{cases}$$

$$f_0(x+\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & -x-at\leqslant\xi\leqslant -x+at\\ 0 & \xi>-x+at \text{ 或 } \xi<-x-at\end{cases}$$

于是,若 $x\geqslant at$,即 $t\leqslant\dfrac{x}{a}$,此时 $-x+at\leqslant0$,则(4-104)式为

$$u(x,t)=\int_{x+at}^{x-at}\frac{1}{2a}\sin\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{2a}[\cos(x-at)-\cos(x+at)]$$

若 $x<at$,即 $t>x/a$,此时 $-x+at>0$,则(4-104)式为

$$u(x,t)=\int_0^{x-at}\frac{1}{2a}\sin\xi d\xi-\int_0^{-x+at}\frac{1}{2a}\sin\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-x+at}^{x-at}\sin\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{2a}[\cos(x-at)-\cos(x+at)]$$

故,无论在何种情形下,所求的定解问题的解恒为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}[\cos(x-at)-\cos(x+at)]$$

例 4.16 用格林函数法求定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} & (t \geqslant 0) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} & \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (0 \leqslant x \leqslant l) \end{cases}$$

的解，其中 $\varphi(x)$ 于 $[0,l]$ 上连续可微，且 $\varphi(0)=\varphi(l)$，$\varphi'(0)=\varphi'(l)$.

解 首先将 $\varphi(x)$ 以 l 为周期，周期地开拓到整个数轴上，并设为 $\Phi(x)$，从而

$$\Phi(x+l) = \Phi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

我们转而考虑如下的一维热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ \tilde{u}|_{t=0} = \Phi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

由 § 4.1 的 4.1.3 可知，按格林函数法求得该定解问题的解为

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} d\xi$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{kl}^{(k+1)l} \Phi(\xi) e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} d\xi$$

作变数变换

$$\eta = \xi - kl$$

则有

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^l \Phi(\eta + kl) e^{-(x-\eta-kl)^2/4a^2 t} d\eta$$

注意到 $\Phi(x)$ 是以 l 为周期的周期函数，即

$$\Phi(\eta + kl) = \Phi(\eta)$$

同时，当 $0 \leqslant \eta \leqslant l$ 时

$$\Phi(\eta) = \varphi(\eta)$$

并且，当 $0 \leqslant x \leqslant 1, t > 0$ 时，$\tilde{u}(x,t)$ 就是所求定解问题的解 $u(x,t)$，即

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^l \varphi(\eta) e^{-(x-\eta-kl)^2/4a^2 t} d\eta$$

第五章 δ-函数在数字信号处理中的应用

§5.1 数字信号处理简介

为了阐述δ-函数在数字信号处理中的应用，我们先简单介绍什么是数字信号处理以及它的发展概况.

所谓信号就是一个传载信息的函数，这种信息通常是表示一个有关的物理系统之状态或特性的. 习惯上把信号的数学表达式的自变量当作时间，尽管事实上它未必代表时间. 并且，这个自变量可以是连续的，也可以是离散的. 定义在时间连续的集合上的信号，用连续变量函数表示，叫做时域连续信号；定义在时间离散的集合上的信号，用数字序列表示，叫做时域离散信号. 信号的幅度也可以是连续的，也可以是离散的. 数字信号就是时间和幅度都是离散的信号. 时间和幅度都连续的信号又称为模拟信号. 数字信号处理就是用数字方法处理各种信息的技术，它是一门新兴的独立的应用科学，主要是研究用数字或符号序列表示和处理各种信息. 处理的目的不外乎是，估计信号的特征参数；或者把信号变换成某种更符合要求的形式，或者是剔除混在信号中的噪声和干扰等.

几乎在每个科学和技术的领域里，为了容易提取信号，都需要对接收的信号进行处理，例如在石油地震勘探中，当人为设计的炮声一响，各种仪器开始接收地震波(即是地震信号，数学上表示为时间域的离散函数). 然而，接收来的这种信号，包括了许多干扰信息，在时间域就分析不出有效的和干扰的信号，于是，专业人员就根据需要，设计一个变换，将其转换成频率域信号，这样，他们就可以根据有效信号的频率及干扰信号的频率之不同，将两个(或者多个)按某种方式合并在一起的信号分离开来. 也可以增强一个信号的某一分量或

参数．这些手段都称为数字信号处理．

所谓信号处理系统，也是按照信号分类的同样原则分类的．如时域连续系统是指输入和输出都是时域连续信号的系统；而时域离散系统是输入和输出都是时域离散信号的系统；类似地，模拟系统是输入和输出都是模拟信号系统；而数字系统则是输入和输出都是数字信号的系统．由于时域离散信号可以通过对一个时 域连续信号取样而得到，或者直接通过某种时域离散处理而产生．因此，在信号处理的理论中，只要研究幅度和时间都是离散的信号就可以了．

无论时域离散信号的来源如何，数字信号处理系统都有许多引人注目的特点，它既可以借助于程序在通用数字计算机上来实现；也可以通过用硬件来完成；必要时它还可以模仿模拟系统；更重要的是它可用来实现模拟硬件不可能实现的信号变换．

最近又研制出一种可编程序处理机，它不仅功能较多，而且处理的速度快，是大有前途的数字信号处理设备．

由于数字系统在通用数字计算机上处理，不随使用条件（如环境温度、电源电压、老化程度等）而变化，噪声干扰小，同时，又容易按不同要求而变化．因此，就具有速度快、精度高、手段多、稳定性强、灵活性大等许多优点．所以数字信号处理在通讯、雷达、声纳、地震、遥感、生物医学、核子科学等科学技术领域内都得到迅速发展．

数字信号处理的手段（或者说是变换方法）是丰富多彩的，而且，目前许多新方法、新技术又不断出现，如离散傅氏变换（或者说离散频谱分析）、快速傅氏变换、褶积和相关、快速褶积和相关、Z 变换、希尔伯特变换、沃什变换、哈达码变换以及数字滤波、褶积滤波、线性滤波、递归滤波、广义维纳滤波，还有信号的插值、平滑和加工等处理方法．但是，应该强调的是离散傅氏变换和数字滤波仍然是两种最基本的数字信号处理的方法．由于本书重点不是讨论数字信号处理，因此，这些内容不能一一列入，感兴趣的读者可查阅有关的参考书．

δ-函数在数字信号处理中占有重要地位，有许多数学原理及其变换公式，都是借助于 δ-函数的概念和性质而建立起来的．它的应用主要表现在以下三个方面：

1. 任意离散信号均可表示为 δ-函数(即单位脉冲函数)的加权和;

2. δ-函数运算性质的应用;

3. 等间隔的脉冲函数序列(即 δ-函数序列)的谱,仍然是脉冲函数序列.

从以下几节的讨论中,我们可以看到 δ-函数在推导数字信号处理的数学原理上,有着举足轻重的作用.

§5.2 任意离散信号均可表示为 δ-函数的加权和

5.2.1 单位脉冲序列的概念

在时域离散系统中,信号通常表示为一个序列的形式,即一个数字序列 x,它的第 n 个数字以 $x(n)$表示,并且 $x(n)$仅仅对于整数 n 值才有定义. 于是 δ-函数在时域离散系统中被定义为:

$$\delta(n)=\begin{cases}0 & \text{当 } n\neq 0 \text{ 时},\\ 1 & \text{当 } n=0 \text{ 时}\end{cases} \tag{5-1}$$

人们通常称 $\delta(n)$为单位取样序列. 容易看到单位取样序列在时域离散信号和系统中所起的作用,和单位脉冲函数 $\delta(x)$在时域连续信号和系统中所起的作用是相同的. 从数学上看,序列也是函数,尽管它们的定义有所不同,我们也称 $\delta(n)$为脉冲函数. 有的书上也称$\delta(n)$为脉冲串、冲激序列等. 值得注意的是时域离散脉冲函数不象时域连续脉冲函数那样复杂,从(5-1)式就可以看到$\delta(n)$的定义要比$\delta(x)$的定义简单而精确.

在应用中还要经常用到所谓单位阶跃序列,通常用 $u(n)$来表示,即

$$u(n)=\begin{cases}1 & \text{当 } n\geqslant 0 \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } n<0 \text{ 时}\end{cases} \tag{5-2}$$

不难看到 $\delta(n)$、$u(n)$有如下的重要关系:

$$u(n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(n) \tag{5-3}$$

而且，类似地有

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{5-4}$$

由(5-1)式还可以得到，对任意整数 k 值的脉冲延迟序列为：

$$\delta(n-k)=\begin{cases}1 & \text{当 } n=k \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } n\neq k \text{ 时}\end{cases} \tag{5-5}$$

5.2.2 任意序列均可表示为脉冲序列的加权和

顾名思义，脉冲序列 $\delta(n)$ 在数字信号处理中，主要是用来将连续函数进行离散化，即设时域连续函数 $f(t)$ 在 $t=T$ 时是连续的，则 $f(t)$ 在时间 T 的函数值可表示为：

$$f(t)=f(t)\delta(t-T) \tag{5-6}$$

也就是 T 时刻产生的脉冲，其幅度等于时刻 T 的函数值，如函数 $f(t)$ 在 $t=nT(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是连续的，则

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(nT)\delta(t-nT) \tag{5-7}$$

(5-7)式说明，时域连续函数 $f(t)$ 的抽样波形是等距脉冲的一个无穷序列. 每一个脉冲的幅度就等于 $f(t)$ 在脉冲出现时刻的值. 也就是当引入了 δ-函数后，任何一个时域连续函数都可以写成(5-7)式右端的离散形式. 正是由于 δ-函数的这一作用，我们就可以对于任意的时域离散序列 $x(n)$，将它表示为脉冲序列的加权和，即

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k) \tag{5-8}$$

例如，序列

$$\{x(-3),x(-1),x(1),x(3)\}=\{-4,3,1,2\}$$

则有

$$x(n)=-4\delta(n+3)+3\delta(n+1)+\delta(n-1)+2\delta(n-3)$$

5.2.3 线性时不变系统和离散褶积

根据(5-8)式，可以推导并给出离散褶积的概念. 为此，先给出系

统、线性系统和线性时不变系统的概念.

系统在数学上定义为将输入序列 $h(n)$ 映射成输出序列 $H(n)$ 的唯一性变换，或者称为运算，记为

$$H(n)=T[h(n)] \tag{5-9}$$

其中 T 由给定的系统确定. 或者具体地说，一个离散时间系统就是将一个序列 $h(n)$ 变换成另一个序列 $H(n)$ 的变换. 图 5-1 是离散时间系统的图形表示. 序列 $h(n)$ 称为输入，$H(n)$ 称为输出或者称为响应. 如果设输入序列为 $\delta(n)$，则输出序列为 $H(n)$，就称 $H(n)$ 为单位脉冲响应（也称为单位取样响应）.

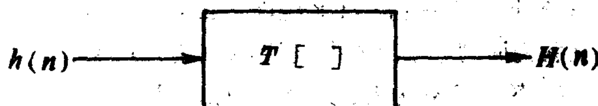


图 5-1

对变换 $T[\ \ ]$ 加上种种限制条件，就可以定义出各类时域离散系统. 由于线性时不变系统在数学上比较容易表示，同时，又由于它可以设计成实现多种有用的信号处理功能，因此，这种系统被人们广泛地采用.

设 $h_1(n)$，$h_2(n)$ 为任意二时间序列，α，β 为两个任意常数，若有

$$T[\alpha h_1(n)+\beta h_2(n)]=\alpha T[h_1(n)]+\beta T[h_2(n)] \tag{5-10}$$

成立，则称系统 T 是线性的. (5-8)式告诉我们任意序列 $x(n)$ 可以表示为各延迟的脉冲序列的加权和，再由(5-10)，可以看到线性系统完全可以通过其单位脉冲响应来表示；也就是若 $h_k(n)$ 为系统对 $\delta(n-k)$ 的单位脉冲响应，由(5-8)式可得

$$y(n)=T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)\right]$$

再根据(5-10)式得

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)T[\delta(n-k)]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h_k(n). \tag{5-11}$$

(5-11)式中的 $h_k(n)$ 要取决于 n 和 k，这对计算系统响应用处不大，如

若再加一条时不变的约束条件,就会得到更为理想的结论.

若设 $y(n)$ 是系统对于 $x(n)$ 的响应,则 $y(n-k)$ 就是系统对于 $x(n-k)$ 的响应,其中 k 为整数,这就是说输入的延迟导致输出具有相同的延迟,并且若 n 是代表时间的话,我们称这样的系统为时不变系统.一个系统既是线性的,同时又是时不变的,则称为线性时不变系统.通常简称为 LTI 系统(即 Linear Time Invariant System 的缩写).让我们回到(5-11)式中,若系统 T 是 LTI 系统,由于输入序列为 $\delta(n-k)$,输出序列为 $h_k(n)=h(n-k)$,于是(5-11)式可化为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)T[\delta(n-k)]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k) \quad (5\text{-}12)$$

(5-12)式右端通常称为褶积和,既若序列 $y(n)$ 可表示为(5-12)式,则称 $y(n)$ 为序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的褶积,第三章积分变换中的褶积是在连续的意义下讨论的,这里的褶积又可称为离散褶积,也记为

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

于(5-12)式中将 k 和 $n-k$ 互换,则有

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(n-k)h(k)\\&=h(n)*x(n)\end{aligned} \quad (5\text{-}13)$$

这表明这种离散褶积是可交换的,也就是褶积结果与进行褶积运算的两个序列的先后次序无关.

由(5-12)或者是(5-13)式可知,对于给定的输入序列,不同的脉冲响应 $h(n)$ 将产生不同的输出,也就是说,任何 LTI 系统的特性完全可以通过其脉冲响应 $h(n)$ 而表现出来,这一点在应用上极为方便.

离散褶积的运算在数字信号处理中是经常要用的,前面已经说过,工程技术中所接受到的信号,一般都包括有效信号 $h(t)$ 和干扰信号 $H(t)$ 两种,即

$$s(t)=h(t)+H(t) \quad (5\text{-}14)$$

对信号处理之目的,就是要削弱干扰信号,增强有效信号,就所接受到的信号一般来说,这两种信号是分不开的,由于从实际资料分析发现,在许多情况下,干扰信号的频谱 $H(f)$ 与有效信号的频谱 h

(f)是不同的，一种特别的情况是两种信号的频谱是分离的(如图 5-2 所示). 于是可以人为地设计一个频率函数(称为滤波因子，或者形象地称为滤波器)

$$G(f)=\begin{cases}1 & 当\ h(f)\neq 0\ 时\\ 0 & 当\ h(f)=0\ 时\end{cases}$$

将(5-14)式两端取傅氏变换，再乘以 $G(f)$ 得

$$s(f)G(f)=h(f)G(f)+H(f)G(f) \tag{5-15}$$

因为 $h(f)=0$ 时，$G(f)=0$，所以 $H(f)G(f)=0$，从而有

$$s(f)=h(f)G(f)=h(f)$$

这样 $h(f)$ 与 $G(f)$ 相乘的处理，就达到了滤掉干扰信号，保留有效信号之目的. 这个过程称为滤波，由傅氏变换的褶积定理又知

$$\begin{cases} y(n)=x(n)*h(n) & (5\text{-}16)\\ Y(f)=X(f)H(f) & (5\text{-}17)\end{cases}$$

这两个公式分别称为离散信号的时间域滤波公式(5-16)和离散信号频率域的滤波公式(5-17). 从数学上来看，两个信号的褶积的频谱等于两个信号频谱的乘积. 因此，要计算信号频谱的乘积，必须先计算两个信号的离散褶积，可见褶积运算在数字滤波中是何等重要. 关于褶积运算有一系列的方法，如直接法、矩阵法等. 特别是在快速傅氏变换的基础上，又出现了所谓快速褶积运算，这里都不一一介绍了.

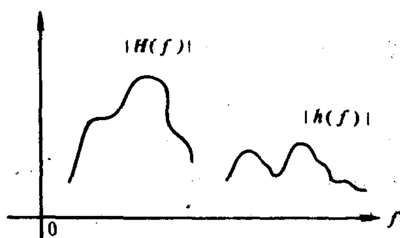


图 5-2

§5.3 等间隔脉冲序列的谱仍是脉冲序列

我们知道 δ-函数是一种十分重要的数学工具，它的运用可以大大简化许多冗长而繁杂的推导. 从以下要讨论的抽样定理和离散傅

氏变换，便足以看到这一点.

5.3.1 抽样序列的频谱

无论是在理论上还是在应用上，傅氏变换都是一个十分重要的数学方法.特别是在许多科学技术上，应用这个变换方法可以把原来不能办到的事情变为可以实现了；把原来非常复杂的问题得以简化.但是，在应用上所出现的信号(或者说是时间的函数)都是连续的，不妨把它记为 $x(t)$. 要运用通用数字计算机来处理这些信号，首先必须将这些连续信号离散化.这种离散化的方法就称为抽样.也就是按一定时间间隔 T 进行取值，使原来连续函数 $x(t)$ 变为离散函数 $x(nT)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 或者称为抽样序列.这样，随之便产生了一个问题，即抽样间隔 T 选取多大，才能使经过变换了的信号不发生畸变，也就是抽样序列 $x(nT)$ 在 T 取多大值时，保证经过变换后仍然能恢复成连续信号 $x(t)$ 呢？以及由离散信号恢复成连续信号 $x(t)$ 的具体公式又是什么呢？这将在后面的抽样定理中回答.本段将讨论，这样产生的抽样序列的频谱是什么？

设有连续信号 $x(t)$，$t_0\in(-\infty,+\infty)$，则由 δ-函数的性质 1.7 得

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0) \tag{5-18}$$

(5-18)式说明 $x(t)$ 在 t_0 时刻产生的脉冲，其幅度恰好等于在时刻 t_0 的函数值.因此，如果函数 $x(t)$ 在 $t=nT$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是连续的，则 $x(t)$ 在这些点处的离散值为

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{-\infty}x(nT)\delta(t-nT) \tag{5-19}$$

同时，由本章 § 5.2 知，任意一个序列 $x(nT)$ 都可以表示为 δ-函数的加权和，所以(5-19)式说明函数 $x(t)$ 经抽样后便是等距脉冲的一个无限序列，每一个脉冲的幅度就等于 $x(t)$ 在脉冲出现时刻的值.这也就是抽样问题的数学表达式.

设连续信号 $x(t)$ 按时间间隔 T 进行抽样，得到的离散值记为 $\hat{x}(t)=x(nT)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，则由(5-18)和(5-19)式知 $x(t)$ 可表示为

$$\hat{x}(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) \tag{5-20}$$

为了求 $\hat{x}(t)$的谱 $\hat{X}(f)$的表达式，需要先求 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$的频谱. 这个谱企图通过傅氏变换的方法是求不到的，因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\right]e^{-i2\pi ft}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)e^{-i2\pi ft}dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-i2\pi fnT}$$

而 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-i2\pi fnT}$ 是一个发散级数，所以，求不到谱. 为此，必须另找途径.

设 $c(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$，其谱以 $C(f)$表示，则由于 $c(t)$是一个定时产生脉冲的序列，因此，它可以看做是一个周期函数，故于$[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$上可展成傅氏级数

$$c(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{i2\pi nft} \tag{5-21}$$

其中 C_n 为由 $c(t)$确定的傅氏系数，也就是

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}c(t)e^{-i2\pi nft}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)e^{-i2\pi nft}dt$$

因为在$[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$上，$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$只有一项 $\delta(t)$，所以

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-i2\pi nft}dt=\frac{1}{T} \tag{5-22}$$

故 $c(t)$所展成的傅氏级数为

$$c(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}e^{i2\pi nft} \tag{5-23}$$

将(5-23)取傅氏变换就得到等间隔脉冲序列的频谱，即，因为

$$F[(\delta(t)]=1,\qquad F[\delta(t-t_0)]=e^{-i2\pi ft_0}$$

以及傅氏变换的对称性质，得

$$F\left[\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2n\pi ft}\right]=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left[e^{-i2n\pi ft}\right]$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

所以，有

$$F\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\right]=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right) \qquad (5\text{-}24)$$

(5-24)式说明等间隔脉冲函数序列的频谱仍是脉冲序列.

5.3.2 连续谱与离散谱之间的关系

为了给出抽样定理的条件，先必须说清楚连续谱与离散谱之间的关系，有了这种重要的联系，我们就可以给出，抽样间隔 T 之大小以保证抽样后的离散信号经过变换，仍能恢复成原来的连续信号.

设连续信号 $x(t)$ 的频谱为 $X(f)$，以及(5-24)式成立，则由(5-20)式得

$$\hat{X}(f)=X(f)*\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(f)*\delta\left(f-\frac{n}{T}\right) \qquad (5\text{-}25)$$

由 δ-函数的性质以及褶积定义知

$$X(f)*\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(f-t)\delta\left(t-\frac{n}{T}\right)dt$$

$$=X\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

所以，(5-25)式变为

$$\hat{X}(f)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X\left(f-\frac{n}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(f-nf_0) \qquad (5\text{-}26)$$

其中 $f_0=\frac{1}{T}$. (5-26)式说明离散信号 $\hat{x}(t)$ 的频谱 $\hat{X}(f)$ 是连续信号 $x(t)$ 的无穷多个谱分量 $X(f-nf_0)$ 的迭加，而这些谱分量 $X(f-nf_0)$ 是频谱 $X(f)$ 沿频率轴 f 关于每个 $f_0=\frac{1}{T}$ 的无穷多次重复.

设连续信号 $x(t)$ 的频谱 $X(f)$ 为有限带宽，即 $X(f)$ 满足条件

$$X(f) = 0 \qquad \text{当} \ |f| > f_c \ \text{时} \tag{5-27}$$

其中 f_c 是 $X(f)$ 的最高频率或者称截止频率. 从而可知 $X(f)$ 的带宽为 $2f_c$，并且不大于它沿 f 轴每次重复的间距 $f_0 = \frac{1}{T}$，于是，它关于每个 f_0 的重复将不产生重迭. 所以，要使频谱 $X(f)$ 在 f 轴上关于 f_0 重复时不发生重迭的所谓假频现象，抽样间隔 T 必须满足

$$T \leqslant \frac{1}{2f_c} \tag{5-28}$$

$T = \frac{1}{2f_c}$ 称为奈奎斯特(Nyquist)抽样时间. $\frac{1}{T} = 2f_c$ 称为奈奎斯特抽样频率.

综上所述，连续信号 $x(t)$ 的频谱 $X(f)$ 满足条件(5-27)式；抽样间隔 T 满足条件(5-28)式，则在奈奎斯特频率范围内，离散信号的频谱 $\hat{X}(f)$ 与连续信号的频谱 $X(f)$ 是相同的(仅差一个常数因子)，即

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{T} X(f) \tag{5-29}$$

这就是说，对连续信号进行抽样时，为了保证抽样后的信号经过变换，使之能恢复到连续信号，或者说避免假频的发生，必须使抽样频率 $\frac{1}{T}$ 足够高，至少是频谱 $X(f)$ 的最高频率的两倍，才能防止 $X(f)$ 的高频分量位移进入确定 $\hat{X}(f)$ 的低频范围中，也就是说，只有这样才能保证信号在变换过程中，不发生畸变.

5.3.3 抽样定理

至此，我们解决了在抽样时，抽样间隔 T 取多大才能保证信号不发生畸变的问题. 现在讨论离散信号恢复成连续信号的具体公式的问题.

为了使连续信号能得以恢复，首先要做到离散谱能恢复成连续谱，这样就必须滤掉 $|f| > f_c$ 的 $\hat{X}(f)$ 的所有高频分量，这一步骤在数学上就表现为将 $\hat{X}(f)$ 乘以单位矩形脉冲函数

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{当} \ |f| \leqslant f_c \ \text{时} \\ 0 & \text{当} \ |f| > f_c \ \text{时} \end{cases} \tag{5-30}$$

即

$$\frac{X(f)}{T} = \hat{X}(f)H(f)$$

或者为

$$X(f) = T\hat{X}(f)H(f) \tag{5-31}$$

由第三章积分变换理论可知

$$F^{-1}[H(f)] = 2f_c \frac{\sin(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t}$$

$$F^{-1}[\hat{X}(f)] = x(nT)$$

所以，根据褶积定理有

$$\begin{aligned} x(t) &= 2f_c T x(nT) * \frac{\sin(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \\ &= 2f_c T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT) * \frac{\sin(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \\ &= 2f_c T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{\sin 2\pi f_c (t - nT)}{2\pi f_c (t - nT)} \end{aligned} \tag{5-32}$$

于是，我们得到如下定理：

定理 5.1（时间域抽样定理） 若连续信号 $x(t)$ 的频谱满足条件(5-27)式；抽样时间间隔 T 满足条件(5-28)式，则连续信号 $x(t)$ 能够由它的离散信号 $x(nT)$ 唯一确定，并且 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{\sin 2\pi f_c (t - nT)}{\pi(t - nT)}$$

类似于定理 5.1，连续谱进行抽样后得到离散谱也存在这样的问题. 这个离散谱在抽样间隔 f_0 取多大，连续谱应该满足什么条件，才能保证谱不发生畸变，即由离散谱恢复成连续谱. 如果不考虑这个问题，经抽样后得到的离散谱将很难反映出连续谱的性质.

设连续谱为 $X(f)$，按频率间隔 f_0 进行抽样，得到离散谱记为 $\hat{X}(f) = X(kf_0)(k=0, \pm 1, \pm 2\cdots)$. 于是，有

$$\hat{X}(f) = X(f) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0) \tag{5-33}$$

并且，由此可得

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{f_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT) \quad （其中 T = \frac{1}{f_0}） \tag{5-34}$$

该式说明，离散信号 $\hat{x}(t)$ 是连续信号 $x(t)$ 沿 t 轴关于每个 $T=\frac{1}{f_0}$ 的无穷多次重复. 如果连续信号 $x(t)$ 的持续时间有限，也就是

$$x(t)=0 \qquad 当\ |t|>T_c\ 时 \tag{5-35}$$

其中 $T_c=\frac{1}{2f_c}$，并且对频谱 $X(f)$ 抽样的间隔不大于 $\frac{1}{2T_c}$ 时，则在时间范围 $|t|\leqslant T_c$ 内，离散信号 $\hat{x}(t)$ 与连续信号 $x(t)$ 相同（仅差一个常数因子），即

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{f_0}x(t) \tag{5-36}$$

若对频谱 $X(f)$ 抽样间隔大于 $\frac{1}{2T_c}$ 时，则信号 $x(t)$ 沿 t 轴重复时将出现重迭. 从(5-34)式可以看到，在 $|t|\leqslant T_c$ 内，离散信号 $\hat{x}(t)$ 与连续信号 $x(t)$ 不相同，抽样后得到的是假信号 $\hat{x}(t)$，这种现象称为假信号现象. 为了避免假信号的发生，使连续信号的频谱 $X(f)$ 可由离散信号的频谱 $\hat{X}(f)$ 重构出来，我们给出与定理 5.1 相类似的定理.

定理 5.2（频率域抽样定理） 如果连续信号函数 $x(t)$ 的持续时间满足(5-35)式，并且频率抽样间隔 $f_c\leqslant\frac{1}{2T_c}$，则连续谱 $X(f)$ 可由离散谱 $\hat{X}(f)$ 按下式得到恢复

$$X(f)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(kf_0)\frac{\sin 2\pi T_c(f-kf_0)}{2\pi T_c(f-kf_0)} \tag{5-37}$$

(5-37)式的证明与定理 5.1 类似，此处略.

可以说上述两个定理在应用中占有极为重要的地位. 因为，若不考虑抽样间隔的选取，连续信号离散化要产生假频现象，连续谱离散化要产生假信号现象. 这两种现象的产生，都将使抽样后所得的离散信息不能真实地反映连续信息的性质，即使再高级的计算机，利用这些假数据，所算出的结果也是一钱不值的.

而这两个重要定理，由于我们引进了 δ-函数，所以，在推导上非常简单，经过几个步骤就立刻得出结论；假定没有 δ-函数，这两个定理的推导将是何等的繁琐与冗长是可想而知的. 仅从(5-24)式就可以看出，如若不引入 δ-函数，就需要许多物理、力学上的概念，并且用极限理论加以阐述，甚至由于离散之特性还要动用一个新的积分

——Stieltjes 积分理论*等等. 其繁杂程度是不言而喻的.

5.3.4 离散傅氏变换(DFT)

在离散傅氏变换理论的创建中,δ-函数仍然占有举足轻重的位置. 为了让读者看到离散傅氏变换是怎样应用 δ-函数的,以下从三个基本思想出发来推导离散傅氏变换.

1. 把离散傅氏变换看成是连续傅氏变换的特殊情况. 因而,对连续傅氏变换理论,进行适当修改就导出了离散傅氏变换;

2. 为了用计算机进行计算,因而,连续的时间信号和频率信号,都要根据本章抽样定理的条件进行抽样(即离散化);

3. 抽样后的离散信号,都是一个无穷序列,为了便于上机计算,更是为了借用傅氏级数理论,所以,必须将抽样后的无穷序列进行截断成为一个有限序列. 或者说人为地造成一个周期序列.

修改连续傅氏变换导出离散傅氏变换的过程要经过以下三个步骤:

1° 根据本章定理 5.1,将连续信号 $x(t)$ 抽样. 用 $\hat{x}(t)$ 表示它的离散值,即

$$\hat{x}(t) = x(nT) \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

由公式(5-19)得

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT) \tag{5-39}$$

2° 将无穷序列(5-39)式截断为 N 个值. 即将(5-39)式两端乘以矩形脉冲函数

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{当} -\dfrac{T}{2} < t < T_0 - \dfrac{T}{2} \text{时} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{5-40}$$

其中 T_0 是截断函数的持续时间. 也就是

$$\hat{x}(t)g(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)\right]g(t)$$

---

* Stieltjes 积分是黎曼积分的推广.

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x(kT)\delta(t - kT) \tag{5-41}$$

这里假定在截断区间内有 N 个等间隔的脉冲函数，即 $N=T_0/T(T_0=NT)$.

3° 对(5-41)式的傅氏变换进行抽样(当然要满足本章定理 5.2 的条件). 这就等价于将(5-41)式与时间函数 $T_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$在时域内作褶积(请看(5-24)式)，即

$$\hat{x}(t)g(t) * \left[T_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)\right] = \left[\sum_{K=0}^{N-1} x(nT)\delta(t-nT)\right]$$

$$* \left[T_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)\right]$$

$$= \cdots + T_0\sum_{k=0}^{N-1} x(kT)\delta(t+T_0-kT) + T_0\sum_{k=0}^{N-1} x(kT)\delta(t-kT)$$

$$+ T_0\sum_{k=0}^{N-1} x(kT)\delta(t-T_0-kT) + \cdots \tag{5-42}$$

注意(5-42)式是以 T_0 为周期的周期函数，写成紧凑形式得

$$T_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{N-1} x(kT)\delta(t-kT-nT_0)\right] \tag{5-43}$$

为了求(5-43)式的傅氏变换，设(5-43)式的傅氏变换记为$\hat{X}(f)$，根据(5-24)式有

$$\hat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\delta(f-nf_0) \qquad \left(f_0 = \frac{1}{T_0}\right) \tag{5-44}$$

其中

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T_0-T/2}\left\{T_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{N-1} x(kT)\delta(t-kT-nT_0)\right]\right\}e^{-i2\pi nt/T_0}dt$$

由于积分只是在一个周期上进行，因此

$$C_n = \int_{-T/2}^{T_0-T/2}\sum_{k=0}^{N-1} x(kT)\delta(t-kT)e^{-i2\pi nt/T_0}dt$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x(kT)\int_{-T/2}^{T_0-T/2} e^{-i2\pi nt/T_0}\delta(t-kT)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x(kT) e^{-i2\pi nkT/T_0}$$

又由于 $T_0 = NT$，故上式变为

$$C_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT) e^{-i2\pi nk/N} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \quad (5\text{-}45)$$

即(5-43)式的傅氏变换为

$$\hat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} x(kT) e^{-i2\pi nk/N} \right] \delta(f - nf_0) \qquad (5\text{-}46)$$

事实上，从(5-45)式可以看到 C_n 是以 N 为周期的周期函数，因为，于(5-45)式中设 $n = m + N$，则有

$$e^{-i2\pi k(m+N)/N} = e^{-i2\pi km/N} \cdot e^{-i2k\pi}$$

而 $e^{-i2k\pi} = 1$，所以，有

$$e^{-i2k\pi(m+N)/N} = e^{-i2\pi km/N}$$

即 $C_{m+N} = C_m$. 故，(5-46)式中虽然是无穷多项，实质上只有 N 个独立的值. 当取频率间隔 $f = \frac{n}{NT}$ 时，则(5-46)式变为

$$\hat{X}\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT) e^{-i2\pi nk/N} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \ (5\text{-}47)$$

(5-47)式就是我们所要求的离散傅氏变换，它是通过连续傅氏变换，将 N 个时间变量与 N 个频率变量联系起来，假若知道时间信号 $x(t)$ 的 N 个时间变量是某周期函数的一个周期，那么，由(5-47)式便可迅速地算出这个周期函数的傅氏变换(或者说是该周期函数的离散谱).

5.3.5 离散傅氏逆变换

离散傅氏变换是由离散信号 $x(kT)$ 来确定离散谱 $\hat{X}\left(\frac{n}{NT}\right)$ 的；而离散傅氏逆变换则是要根据已知的离散谱来求它所对应的离散信号.

我们将(5-47)式改写为

$$\hat{X}\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{r=0}^{N-1} x(rT) e^{-i2\pi nr/N} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$$

(5-48)

将(5-48)式两端乘以 $e^{i2\pi nm/N}$ 并对 n 从 0 到 $N-1$ 求和得到

$$\sum_{n=0}^{N-1}\hat{X}\left(\frac{n}{NT}\right)e^{i2\pi nm/N}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{r=0}^{N-1}x(rT)e^{-i2\pi nr/N}\right)e^{i2\pi nm/N}$$

$$=\sum_{r=0}^{N-1}x(rT)\cdot\sum_{n=0}^{N-1}e^{i2\pi n(m-r)/N} \tag{5-49}$$

因为

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{i2\pi n(m-r)/N}=\begin{cases}0 & \text{当 } m\neq r \text{ 时}\\ N & \text{当 } m=r \text{ 时}\end{cases}$$

所以，当 $m=r$ 时，(5-49)式变为

$$x(mT)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\hat{X}\left(\frac{n}{NT}\right)e^{i2\pi nm/N}\qquad(m=0,1,2,\cdots,N-1) \tag{5-50}$$

(5-50)式便是我们所要求的离散傅氏逆变换公式.

为了使公式表示得简捷起见，在(5-47)和(5-50)式中，令

$$\begin{cases}X(m)=\hat{X}\left(\dfrac{n}{NT}\right)\\ x(n)=x(kT)\\ W=e^{-i2\pi/N}\end{cases}$$

则(5-47)、(5-50)式变为

$$\begin{cases}X(m)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}x(n)W^{mn} & (5\text{-}51)\\ x(n)=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{m=0}^{N-1}X(m)W^{-mn} & (5\text{-}52)\end{cases}$$

$$m,n=0,1,2,\cdots,N-1$$

以后常用的公式便是(5-51)式和(5-52)式. 并且称为离散傅氏变换对，它们建立起 N 个信号 $x(n)$ 与 N 个频谱 $X(m)$ 之间的一一对应关系. 为了书写方便，以后将离散傅氏变换简记为 DFT(即 Discrete Fourier Transform 的缩写). 将正逆变换间的对应关系记为

$$x(n)\underset{N}{\leftrightarrow}X(m)$$

其中 N 表示为周期.

应该注意到，因为 W^{nm} 以 N 为周期，即

$$W^{nm}=W^{(n+N)m}=W^{(m+N)n}$$

所以，由(5-51)和(5-52)式所定义的正变换 $X(m)$ 及逆变换 $x(n)$ 也是以 N 为周期的序列. 亦即

$$X(m+N)=X(m)$$

$$x(n+N)=x(n)$$

故 N 个离散信号 $x(n)$ 可以看成周期信号 $x(n)$ 在一个周期 N 内的值；N 个离散频谱 $X(m)$ 可以看成周期离散频谱 $X(m)$ 在一个周期 N 内的值.

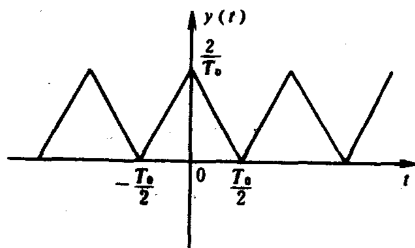


图 5-3

下面我们来讨论，当引入了 δ-函数概念后，傅氏级数和傅氏变换便统一起来的问题.

以图 5-3 的周期性的三角波形为例加以说明. 设这个三角波形函数为 $y(t)$，因为它是一个偶函数，所以，这个函数展成傅氏级数时，其傅氏系数为

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)\cos(2\pi n f_0 t)dt \\
&= \frac{2}{T_0}\cdot\int_0^{T_0/2}\left(\frac{2}{T_0}-\frac{4}{T_0^2}t\right)\cos(2\pi n f_0 t)dt \\
&= \begin{cases} \dfrac{4}{T_0 n^2\pi^2}\sin\dfrac{n\pi}{2} & \text{当 } n\neq 0 \text{ 时} \\ \dfrac{1}{T_0} & \text{当 } n=0 \text{ 时} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{4}{T_0 n^2\pi^2} & \text{当 } n=\pm 1,\pm 3,\cdots \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } n=\pm 2,\pm 4,\cdots \text{ 时} \\ \dfrac{1}{T_0} & \text{当 } n=0 \text{ 时} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5-53}$$

显然，$y(t)$ 所展成的傅氏级数为

$$y(t)=\frac{1}{T_0}+\frac{8}{\pi^2 T_0}\Big[\cos(2\pi f_0 t)$$

$$+\frac{1}{3^2}\cos(6\pi f_0 t)+\frac{1}{5^2}\cos(10\pi f_0 t)+\cdots\Big]$$

其中 $f_0=\frac{1}{T_0}$

以下我们将证明，通过 $y(t)$ 的傅氏变换可以获得同样的结果.

由抽样定理可知，周期三角波 $y(t)$ 就是图 5-3 中单个三角波 $h(t)$ 和等距脉冲函数无穷序列 $x(t)$ 的褶积，即

$$y(t)=h(t)*x(t) \tag{5-54}$$

由 (5-24) 式给出，$x(t)$ 的傅氏变换为 $\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{n}{T_0})$，$h(t)$ 的傅氏变换记为 $H(f)$，于是

$$Y(f)=H(f)X(f)=H(f)\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{n}{T_0})$$

$$=\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}H(\frac{n}{T_0})\delta(f-\frac{n}{T_0}) \tag{5-55}$$

由此可见，周期函数 $y(t)$ 的傅氏变换是幅度分别为 $H(\frac{n}{T_0})\frac{1}{T_0}$ 的一个等距脉冲函数的无穷序列. 又知周期函数 $y(t)$ 的傅氏级数，就其指数形式而言，是幅度为

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}y(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{5-56}$$

的无穷多个复正弦函数的和. 容易看到在 $[-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2}]$ 内 $y(t)=h(t)$，于是，将(5-56)式中的 $y(t)$ 代之以 $h(t)$ 得

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}h(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt=\frac{1}{T_0}H(nf_0)=\frac{1}{T_0}H(\frac{n}{T_0}) \tag{5-57}$$

这就看到，对一个周期函数，由傅氏变换所导出的系数和用通常的傅氏级数所导出的系数是相同的. 我们比较(5-55)式和(5-57)式发现，除了因子 $\frac{1}{T_0}$ 外，函数 $y(t)$ 的傅氏级数展开式的系数 C_n 等于傅氏变换 $H(f)$ 在 $\frac{n}{T_0}$ 点处的值.

5.3.6 离散傅氏变换的性质

和连续傅氏变换一样，离散傅氏变换也有许多在应用上非常重要的性质. 为了应用上的方便，我们将其开列如下

1. **线性性** 如果 $x_1(n)\underset{N}{\leftrightarrow}X_1(m)$，$x_2(n)\underset{N}{\leftrightarrow}X_2(m)$，则对任意常数 a_1,a_2 有

$$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\underset{N}{\longleftrightarrow}a_1X_1(m)+a_2X_2(m) \tag{5-58}$$

2. **对称性** 如果 $x(n)\underset{N}{\longleftrightarrow}X(m)$，则有

$$\frac{1}{N}x(n)\underset{N}{\longleftrightarrow}X(-m) \tag{5-59}$$

3. **时间位移** 如果 $x(n)\underset{N}{\longleftrightarrow}X(m)$，则有

$$x(n\pm h)\underset{N}{\longleftrightarrow}X(m)W^{\mp mh} \tag{5-60}$$

其中 $h=0,1,2,\cdots,N-1$

4. **频率位移** 如果 $x(n)\underset{N}{\longleftrightarrow}X(m)$，则有

$$X(m\pm l)\underset{N}{\longleftrightarrow}x(n)W^{\pm nl}\quad(l=0,1,2,\cdots,N-1) \tag{5-61}$$

5. **褶积定理** 如果 $x_1(n)\underset{N}{\longleftrightarrow}X_1(m)$，$x_2(n)\longleftrightarrow X_2(m)$，且 $x_1(n)$与$x_2(n)$的褶积为

$$x_3(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(h)x_2(n-h)$$

则有

$$X_3(m)=X_1(m)X_2(m) \tag{5-62}$$

其中 $X_3(m)$是 $x_3(n)$的傅氏变换. 并且，如果

$$X'_3(m)=X_1(m)*X_2(m)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}X_2(l)X_1(m-l)$$

则有

$$x'_3(n)=x_1(n)x_2(n) \tag{5-63}$$

其中 $x'_3(n)$是 $X'_3(m)$的离散傅氏逆变换.

6. **相关定理** 如果二实序列 $x_1(n)$，$x_2(n)$的谱分别为 $X_1(m)$和 $X_2(m)$，并记 $X_1(n)$与 $X_2(n)$的相关为：

$$x_3(n) = \sum_{h=0}^{N-1} x_1(h)x_2(n+h) \tag{5-64}$$

则有

$$X_3(m) = X_1^*(m)X_2(m) \tag{5-65}$$

其中 $X_3(m)$是 $x_3(n)$的离散傅氏变换，$X_1^*(m)$是 $X_1(m)$的复共轭谱.

7. **巴塞瓦定理** 如果二实序列 $x_1(n)$、$x_2(n)$相同，则由(5-65)式得到

$$X_3(m) = |X_1(m)|^2 \tag{5-66}$$

将(5-66)式及(5-64)式代入逆变换公式(5-52)式中得

$$\sum_{h=0}^{N-1} x_1(h)x_2(n+h) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} |X_1(m)|^2 W^{-nm}$$

令 $n=0$ 就得到巴塞瓦等式

$$\sum_{h=0}^{N-1} x^2(h) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} |X(m)|^2 \tag{5-67}$$

8. **偶函数** 若时间序列 $x(n)$是个实偶函数，即 $x(-n)=x(n)$，则它的离散谱也是个实的偶函数.

9. **奇函数** 如果时间序列 $x(n)$是个实的奇函数，即 $x(-n)=-x(n)$，则它的离散谱是一个虚的奇函数.

10. **复共轭定理** 对于实的时间序列 $x(n)$，则它的离散谱具有偶的实部与奇的虚部，即 $X(m)=X^*(-m)$；对于虚的时间序列$x(n)$，则它的离散谱具有奇的实部与偶的虚部，即 $X(m)=-X^*(m)$.

上述性质的证明是容易的，只要注意离散傅氏变换的定义(5-51)和(5-52)式，性质 1 到性质 4 是不难得证的，后面 6 个性质的证明，只要适当引用前 4 个性质，及(5-51)和(5-52)式也是简单易证的. 这里仅证性质 5 如下：

证明 根据(5-51)式有

$$X_3(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_3(n)W^{nm} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{h=0}^{N-1} x_1(h)x_2(n-h)\right]W^{nm}$$

$$= \sum_{h=0}^{N-1} x_1(h) \left(\sum_{n=0}^{N-1} x_2(n-h) W^{nm} \right)$$

根据性质 3,便得

$$X_3(m) = \sum_{h=0}^{N-1} x_1(h) X_2(m) W^{mh} = X_2(m) \sum_{h=0}^{N-1} x_1(h) W^{mh}$$

$$= X_2(m) X_1(m)$$

类似地,如果 $X_1(m)$与 $X_2(m)$的褶积为

$$X'_3(m) = X_1(m) * X_2(m) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2(m-l)$$

则有

$$x'_3(n) = x_1(n) x_2(n)$$

其中,$x'_3(n)$是 $X'_3(m)$的离散傅氏逆变换.这就得到了性质 5 的证明.

5.3.7 快速傅氏变换(FFT)简介

离散傅氏变换在许多应用中的极端重要性,是勿须怀疑的;然而,从(5-51)式可知,对于 $x(n)$有 N 个数据点,要想通过(5-51)式直接算出 N 个频谱值,它的计算时间是正比于 N^2 的,即要做 N^2 次乘法运算,特别是 $x(n)$要是复序列时,就需要 $4N^2$ 次实数乘法和 $N(4N-2)$次实数加法.换句话说,就是需要做 N^2 次复数乘法和 $N(N-1)$次复数加法运算,此外,在计算机或专用硬件上实现计算离散傅氏变换时,当然还要求存取输入序列 $x(n)$和系数 W^{nm}的值,这种数据的存取量一般是正比于算术运算的次数.因此,通常衡量一种计算方法的优劣(具体地表现为需要的时间或复杂程度),都是以需要的乘法和加法的次数作为比较标准的.于是,直接计算离散傅氏变换,其计算量之大(特别是当 N 很大时)是相当惊人的.所以,长时期形成这种方法是好,但是算不起的局面,特别是高速计算机产生之前,更是令人不敢想象.这样就使该理论在实际应用中受到很大限制.

由于上述原因,在高速计算机出现之前,很早就有众多的人去找能够减少乘法和加法运算次数的计算方法.一些学者根据 W^{nm}的对称性和周期性提出一些方法,它们的计算量粗略地正比于 $N\log N$ 而

不是 N^2，然而，对于可以手算的很小的 N 值，并无大意义. 直到 1965 年库利(Cooley)和图基(Tukey)发表了计算离散傅氏变换的一种新方法，这种算法当 N 为合数(即 N 为两个或多个整数的乘积时)适用. 至此，激起了将离散傅氏变换应用于数字信号处理的热潮，并导致了若干计算方法的出现. 这些方法，现在统称为快速傅氏变换算法，简记为 FFT(它是 Fast Fourier Transform 的缩写). 这一方法在理论上并没有什么新的突破，只不过是计算离散傅氏变换的一种特殊方法，其基本原理是，把计算长度为 N 的序列的离散傅氏变换逐次地分解成计算长度较短序列的变换，并且按分解序列的方式不同将导出各种不同的算法. 目前最常用的是两种基本的快速傅氏变换算法，一种是时间域分解，即根据序列 $x(n)$(其中 n 通常表示和时间有关的量)逐次分解成较短的子序列；第二种基本算法是，将离散傅氏变换谱序列 $X(m)$ 分解成较短的子序列，因而称为频率域分解. 由于 FFT 算法大大地减少了运算次数，节省了时间，因此，突破了离散傅氏变换在应用上的局限性，正因如此，DFT 和 FFT 的算法，现已成为许多科学技术、工程技术，特别是数字信号处理中的一个强有力的工具.

这里不能详细讨论 FFT 的具体计算方法和流程图，只是通过介绍 FFT 的基本思想来阐明 DFT 和 FFT 的关系.

首先，我们把公式(5-51)写成矩阵方程的形式，即因为

$$X(m) = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} \qquad x(n) = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

$$W^{nm} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & \cdots & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \cdots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

所以,(5-51)式可以写成:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \cdots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \tag{5-68}$$

由(5-68)式便可验证,在计算每个谱分量 $X(m)$时,需要进行 N 次复数乘法和 $N-1$ 次复数加法.而每个复数乘法相当于 4 个实数乘法,所以,如果要算出全部谱分量的值,就需作 $4N^2$ 次实数乘法和 $N(4N-2)$次实数加法运算.故,当 N 很大时,计算量之大是十分惊人的.

下面以 $N=4=2^2$ 为例,来说明 FFT 的基本思想和提高计算速度的原因.

先将(5-68)式中的 $X(m)$的次序重新排列(为的是结果要给出正序的输出),

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \tag{5-69}$$

因为 $W=e^{-\frac{2\pi i}{4}}$,所以,$W^0=1,W^4=1,W^8=1,W^2=-W^0,W^6=W^4,W^2=W^2,W^3=W^1,W^9=W^4,W^5=W^5$.所以(5-69)式又可以写为

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & W^0 & W^0 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \tag{5-70}$$

再将(5-70)式中包含 $W^i(i=0,1,2,\cdots,5)$的矩阵分解为每一行仅有两个元素不为 0 的两个矩阵之乘积,即

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \tag{5-71}$$

第三步，将(5-71)式右端按矩阵乘法算出来，即最后两个矩阵先相乘，得出的中间结果再和剩余的一个矩阵相乘

$$\begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_1(1) \\ X_1(2) \\ X_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) + x(2)W^0 \\ x(1) + x(3)W^0 \\ x(0) + x(2)W^2 \\ x(1) + x(3)W^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x(0) + x(2)W^0 \\ x(1) + x(3)W^0 \\ x(0) - x(2)W^0 \\ x(1) - x(3)W^0 \end{bmatrix} \tag{5-72}$$

从(5-72)式可见，在这一步运算中，只需要 2 次复数乘法和 4 次复数加法运算.

第四步，将(5-72)代入(5-71)中，得

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2(0) \\ X_2(1) \\ X_2(2) \\ X_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_1(1) \\ X_1(2) \\ X_1(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_1(0) + X_1(1)W^0 \\ X_1(0) + X_1(1)W^2 \\ X_1(2) + X_1(3)W^1 \\ X_1(2) + X_1(3)W^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(0) + X_1(1)W^0 \\ X_1(0) - X_1(1)W^0 \\ X_1(2) + X_1(3)W^1 \\ X_1(2) - X_1(3)W^1 \end{bmatrix} \tag{5-73}$$

从(5-73)式看到，这一步运算中，也只需要 2 次复数乘法和 4 次复数加法.

由此可见，在计算频谱分量 $X(m)$时，由于进行了矩阵分解(实际上就是缩短了运算的序列)，并且将零引进被分解的矩阵中，使总的运算次数减少到只有 4 次复数乘法(而不是 4^2 次)和 8 次复数加

法(而不是 $4(4-1)=12$ 次).特别地,这是按最坏的情况来计算的,要知分解后的矩阵中还有 $W^0=1, W^4=W^8=1$ 等这些勿需进行复数乘法运算的数,所以,当 $N=4$ 时,这样分解后的运算次数,一般来说是低于 4 次复数乘法运算和 8 次复数加法运算的.

综上所述,可以看到:

1. FFT 算法比直接算法快速的关键是将包含 $W^i(i=0,1,2,\cdots,(N-1)(N-1))$ 的矩阵进行分解,当 $N=4=2^2$ 时,分解成每一行中仅含有两个非零元素的矩阵的乘积;当 $N=8=2^3$ 时,分解成 3 个矩阵;…当 $N=2n$ 时,分解成 n 个矩阵.

2. FFT 算法总的复数运算次数是,当 $N=4$ 时,乘法为 $(4/2)\log_2 4=2$ 次,加法为 $4\cdot\log_2 4=8$ 次;当 $N=8$ 时,乘法为 $\frac{8}{2}\log_2 8=12$ 次,加法为 $8\cdot\log_2 8=24$ 次,一般地,当 $N=2^n$ 时,乘法次数为 $\frac{N}{2}\log_2 N=\frac{N}{2}n$ 次,加法为 $N\log_2 N=N\cdot n$ 次.

至于(5-70)式中的含有 W^i 的矩阵是怎样分解成(5-71)式中的两个矩阵,以及具体计算的流程图,这里都不一一介绍了,有兴趣的读者可查阅 本书后面列出的参考书目.

5.3.8 δ-函数在 $\mathscr{Z}$ 变换中的应用

$\mathscr{Z}$ 变换也是数字信号处理中的一种重要的计算方法.是对离散变量序列进行运算的一种有效的数学工具.在工程技术、运筹学和其它许多应用科学中有着广泛的应用.由于本书的宗旨,我们感兴趣的只是 δ-函数在 $\mathscr{Z}$ 变换的定义的推导以及诸性质中的应用.

我们知道,统计学家关心时间序列分析,经济学家关心预测,而工程师则关心数字滤波.但所有的人都关心对数据进行处理.这些数据常常带有随机起伏的特殊趋势,这种趋势也许就是测量误差,也许是基本现象中的固有的成分.在处理数据时,不外乎采取平滑处理或滤波处理.如果是线性的称为线性滤波,这时 $\mathscr{Z}$ 变换则就大有用武之地了.

对于一个给定的序列 $x(n)$，它的 $\mathscr{Z}$ 变换的定义为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n} \tag{5-74}$$

其中 z 是复变量，$X(z)$称为序列 $x(n)$的变换式或者称为象. (5-74)式右端的幂级数实际上就是复变函数里为我们熟知的罗朗(Laureut)级数展开式. 它在一个环域内收敛，并且是收敛域内每一点的解析函数. 值得注意的是 $\mathscr{Z}$ 变换 $X(z)$的收敛域，完全是由所给序列 $x(n)$的性质决定的.

有趣的是，在时域连续系统的理论中，拉普拉斯变换可以看成傅氏变换的一种推广；而在时域离散信号系统中，$\mathscr{Z}$ 变换既可以作为拉普拉斯变换的特例来处理，又可以看作是离散傅氏变换的推广.

设有一个连续信号 $f(t)$，以 T 为取样间隔进行离散化，由(5-19)式知

$$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}f(nT)\delta(t-nT) \tag{5-75}$$

因为 $L[\delta(t-nT)]=e^{-snT}$，所以，(5－75)式对 t 取拉氏变换得

$$L[f(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)e^{-snT} \tag{5-76}$$

令 $e^{sT}=z$，则(5-76)式变为

$$L[f(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^{-n} \tag{5-77}$$

(5-77)式便告诉我们 $\mathscr{Z}$ 变换为拉氏变换的特殊情形.

再将复变量 z 表示成极坐标形式，即令 $z=re^{i\omega}$，代入(5-74)式中，得

$$X(re^{i\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)r^{-n}e^{-in\omega} \tag{5-78}$$

因此，$x(n)$的 $\mathscr{Z}$ 变换可以看成是序列 $x(n)r^{-n}$的傅氏变换. 特别是当 $r=1$，即 $|z|=1$ 时，序列 $x(n)$的 $\mathscr{Z}$ 变换就是它的傅氏变换.

求平均值(数据平滑的一种简单方法)的过程中就用到了 $\mathscr{Z}$ 变换.

若在时间 t_0 至 t_k 间得一观察值的序列

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

设 y_n 是由 x_n 而得的经平滑的观察值序列，它是由最新 k 个观察值相加并被 k 除而得到的($k=0,1,2,\cdots,n$)，当 n 的值小于 $k-1$ 时，只能相加 n 个可利用的观察值. 这就得到以下方程

$$\begin{cases} y_0 = \frac{1}{k}x_0 \\ y_1 = \frac{1}{k}(x_1 + x_0) \\ y_2 = \frac{1}{k}(x_2 + x_1 + x_0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{k-2} = \frac{1}{k}(x_{k-2} + x_{k-3} + \cdots + x_0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = \frac{1}{k}(x_n + x_{n-1} + \cdots + x_{n-k+1}) \qquad (\text{当 } n \geqslant k-1 \text{ 时}) \end{cases}$$

将上述方程写成紧缩形式，即

$$y_n = \frac{1}{k}(x_n + x_{n-1}u_{n-1} + \cdots + x_{n-k+1}u_{n-k+1}) \tag{5-80}$$

其中 u_n 是单位阶跃序列. 于(5-80)式两端取 $\mathscr{Z}$ 变换，得

$$y(z) = \frac{1}{k}X(z)(1 + z^{-1} + \cdots + z^{-k+1}) \tag{5-81}$$

这样，我们得到传递函数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{k}(1 + z^{-1} + \cdots + z^{-k+1}) \tag{5-82}$$

又知脉冲响应的 $\mathscr{Z}$ 变换是传递函数，所以取(5-82)式的逆 $\mathscr{Z}$ 变换则得脉冲响应为

$$h(n) = \frac{1}{k}[\delta(n) + \delta(n-1) + \cdots + \delta(n-k+1)]$$

可见脉冲响应是由一串脉冲序列所组成，并且每个脉冲强度为$\frac{1}{k}$.

下面我们再讨论与 δ-函数有关的 $\mathscr{Z}$ 变换的几个性质.

(1)序列 $x(n)$的时移性　如果 $x(n)$的 $\mathscr{Z}$ 变换为 $X(z)$，则对任意

的整数 k，有

$$\mathscr{Z}[x(n-k)] = z^{-k}X(z) \tag{5-83}$$

其中 $\mathscr{Z}[x(n-k)]$ 表示序列 $x(n-k)$ 取 $\mathscr{Z}$ 变换(以下同).

证明是容易的，因为只要令 $m=n-k$，便有

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-k)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)z^{-m-k} = z^{-k}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)z^{-m}$$

$$= z^{-k}X(z)$$

所以，(5-83)式成立.

根据(5-83)式，立即可求得序列

$$\delta(n-l) = \begin{cases} 1 & \text{当 } n = l \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } n \neq l \text{ 时} \end{cases}$$

的 $\mathscr{Z}$ 变换，即

$$\mathscr{Z}[\delta(n-l)] = z^{-l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(m)z^{-m} = z^{-l} \tag{5-83$'$}$$

由该式可知 $\delta(n)$ 的 $\mathscr{Z}$ 变换是 1，$\delta(n-l)$ 的 $\mathscr{Z}$ 变换是 z^{-l}.

(2) $X(z)$ 的微分性质　若 $\mathscr{Z}[x(n)]=X(z)$，则有

$$\frac{d}{dz}X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(-n)z^{-n-1}$$

即

$$\mathscr{Z}[n(x(n)] = -z\frac{d}{dz}X(z) \tag{5-84}$$

证明　由 $\mathscr{Z}$ 变换的定义(5-74)式知

$$\mathscr{Z}[nx(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n)z^{-n} = (-z)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(-nz^{-n-1})$$

$$= (-z)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\frac{d}{dz}z^{-n} = (-z)\frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = (-z)\frac{d}{dz}X(z)$$

类似于(5-84)式还有

$$\mathscr{Z}[n^2x(n)] = (-z)\frac{d}{dz}\left[(-z)\frac{d}{dz}X(z)\right] \tag{5-85}$$

我们知道象函数 $X(z)$ 的积分是微分的逆运算，$X(z)$ 的微分对应于象原函数序列 $x(n)$ 乘以 n，相反，$X(z)$ 的积分则应对应于用 n 去除 $x(n)$，

即

$$\mathscr{Z}\left[\frac{1}{n}x(n)\right] = \int X(z)dz \tag{5-86}$$

其中不定积分的常数要取作零，并且，对任意整数 a，还有

$$\mathscr{Z}\left[\frac{x(n)}{-n+a}\right] = z^{-a}\int X(z)z^{a-1}dz \tag{5-87}$$

及

$$\mathscr{Z}\left[\frac{x(n)}{(-n+a)^2}\right] = z^{-a}\int z^{-1}\left(\int X(z)z^{a-1}dz\right)dz \tag{5-88}$$

成立

只要应用(5-86)式，(5-87)和(5-88)式是不难得证的. 这里留给读者练习.

利用(5-84)至(5-88)诸式，我们可以导出几个有用的结论.

设 $\mathscr{Z}[g(n)]=G(z)$，并且

$$-\frac{d}{dz}G(z) = H(z) \tag{5-89}$$

即 $H(z)$是由 $G(z)$的微分而得到的，反之 $G(z)$是由 $H(z)$的积分而得到的. 为了找出这一积分运算的积分限和积分常数，根据 $\mathscr{Z}$ 变换的始值定理(请读者参看《工程数学》积分变换一书的 48 页拉普拉斯变换的初值和始值定理，$\mathscr{Z}$ 变换的始值定理与此相类似)，有

$$\lim_{z\to\infty}G(z) = g(0) \tag{5-90}$$

再将(5-89)式两端从 z 到∞积分，即

$$G(z) - G(\infty) = \int_z^{\infty} H(u)du$$

由(5-90)式知

$$G(z) = g(0) + \int_z^{\infty} H(u)du \tag{5-91}$$

为了使(5-91)式中的广义积分收敛，即当 $z\to\infty$时，$H(z)$必须与$\frac{1}{z^2}$为同阶函数，于是，改进(5-89)式为

$$-\frac{d}{dz}G(z) = \frac{X(z)}{z^2}$$

即，设 $H(z)=\frac{1}{z^2}X(z)$，从而，得

$$G(z)=g(0)+\int_z^{\infty}\frac{X(u)}{u^2}du$$

我们知道(5-91)式是由

$$(n-1)g(n-1)u(n-1)=x(n-2)u(n-2) \tag{5-92}$$

的右端无论在 $n=0$ 或 $n=1$ 都为零时才成立，现将(5-92)式向右移一个单位，得

$$ng(n)=x(n-1)u(n-1)$$

所以，当 $n\neq0$ 时，则有

$$g(n)=\frac{1}{n}x(n-1)u(n-1) \tag{5-93}$$

$g(0)$的值的选取与 $x(n)$的值无关，比较(5-91)和(5-93)式，左端 $\mathscr{Z}[g(n)]=G(z)$，所以，右端部分改写为

$$g(0)\delta(n)+\frac{1}{n}x(n-1)u(n-1)$$

就容易从(5-86)式发现，它的 $\mathscr{Z}$ 变换是

$$g(0)+\int_z^{\infty}\frac{1}{u^2}x(u)du$$

即

$$\mathscr{Z}\left[g(0)\delta(n)+\frac{x(n-1)}{n}u(n-1)\right]=g(0)+\int_z^{\infty}\frac{1}{u^2}x(u)du \tag{5-94}$$

如果序列 $x(n)$用 $x(n+1)$或 $x(n+2)$去替代，可以得出(5-94)式的另外两种形式，即

$$\mathscr{Z}\left[g(0)\delta(n)+\frac{x(n)}{n}u(n-1)\right]=g(0)+\int_z^{\infty}\frac{x(u)-x(0)}{u}du \tag{5-95}$$

$$\mathscr{Z}\left[g(0)\delta(n)+\frac{x(n+1)}{n}u(n-1)\right]$$

$$=g(0)+\int_z^{\infty}[x(u)-x(0)-x(1)u^{-1}]du \tag{5-96}$$

(3)**褶积定理**　若 $x_1(n)$，$x_2(n)$的 $\mathscr{Z}$ 变换分别为 $X_1(z)$和$X_2(z)$，

则 $x_1(n)*x_2(n)$ 的 $\mathscr{Z}$ 变换为 $X_1(z)\cdot X_2(z)$，即

$$\mathscr{Z}[x_1(n)*x_2(n)] = X_1(z)\cdot X_2(z) \tag{5-97}$$

并且，只要(5-97)式右端是若干个 $\mathscr{Z}$ 变换的乘积，我们就可以把它们对应的序列写成褶积的形式，例如(5-83)式，因为由(5-83)′知 $\mathscr{Z}[\delta(n-k)]=z^{-k}$，所以，得

$$x(n-k) = \delta(n-k)*x(n) \tag{5-98}$$

这就说明一个在 k 处的单位脉冲序列与一个序列 $x(n)$ 的褶积等于序列 $x(n)$ 向右位移 k 个单位．如果 $x(n)$ 与在原点的一单位脉冲序列的褶积，则仍得原序列，即

$$x(n) = \delta(n)*x(n) \tag{5-99}$$

根据(5-97)式的重要性质得到的(5-98)和(5-99)两个重要结果，都是非常有用的结论．

(4)尺度变换　一个新的序列可由序列 $x(n)$ 生成．只要新序列在其时间变量为 $x(n)$ 的自变量的整数 k 的倍数时有非零值，而在其它处均为零即可．如下定义的序列 $g(n)$ 便是 $x(n)$ 的新的生成序列

$$g(n) = \begin{cases} x\left(\dfrac{n}{k}\right) & \text{当 } n = 0,k,2k,\cdots \text{ 时} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

我们把 $g(n)$ 表示为脉冲序列的加权和，即

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)\delta(n-kj)$$

并且，其 $\mathscr{Z}$ 变换为

$$G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)z^{-kj}$$

这个式子的右端便是 $x(n)$ 的 $\mathscr{Z}$ 变换，只不过是 z 换成了 z^k(即 $z^{-kj}=(z^k)^{-j}$，这样就得到了 $\mathscr{Z}$ 变换的尺度变换规则为

$$\mathscr{Z}\left[\sum_{j=0}^{\infty} x(j)\delta(n-kj)\right] = X(z^k) \tag{5-100}$$

并且，由此又得到

$$\mathscr{Z}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \delta(n-2j)\right] = \frac{z^2}{z^2-1} \tag{5-101}$$

$$\mathscr{Z}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_j}{j}\delta(n-3j)\right]=\ln\frac{z^3}{z^3-a} \tag{5-102}$$

只要注意到 $\mathscr{Z}[u(n)]=\frac{z}{z-1}$和 $\mathscr{Z}\left[\frac{a^n}{n}u(n-1)\right]=\ln\frac{z}{z-a}$，(5-101)和(5-102)式就不难分别将其导出.

$\mathscr{Z}$ 变换有着极为广泛的应用. 一类很重要的线性离散系统，如把有关目标的数据，收集在具有一定重复频率的离散脉冲内的跟踪雷达，多路的、时间分割的、脉冲调制的遥测系统或通讯系统，以及以计算机作为组成部分的控制系统等，对这类系统进行分析时，虽然也可以用拉普拉斯变换，但是，用 $\mathscr{Z}$ 变换更加简便.

其次，用 $\mathscr{Z}$ 变换解所谓的差分方程，更是简便有效.

关于这些应用，涉及的专业知识面太宽，也距离本书的宗旨甚远，故不赘述. 仅举用 $\mathscr{Z}$ 变换解差分方程一例.

例 5.1 已知 $w(0)=1$，解下列一阶线性差分方程

$$w(t+T)+2w(t)=5t$$

其中 t 为自变量，T 为离散化取样间隔.

解 将所给差分方程两端取单向 $\mathscr{Z}$ 变换(当然也可取双向的)，得

$$z[W(z)+1]+2W(z)=\frac{5Tz}{(z-1)^2}$$

其中 $\mathscr{Z}[w(t)]=W(z)$，$\mathscr{Z}[5t]=\frac{5Tz}{(z-1)^2}$，推导如下

由 $\mathscr{Z}$ 变换的定义(5-74)式和(5-77)式知：

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[5t]&=\sum_{n=0}^{\infty}(5t)z^{-n}=5\sum_{n=0}^{\infty}nTz^{-n}\\&=5Tz^{-1}(1+2z^{-1}+3z^{-1}+\cdots)\\&=\frac{5Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{5Tz}{(z-1)^2}\end{aligned}$$

解关于 $w(t)$的 $\mathscr{Z}$ 变换方程，其解为

$$W(z)=\frac{5Tz}{(z+2)(z-1)^2}-\frac{z}{z+2}$$

为了求其逆，将$\frac{5Tz}{(z+2)(z-1)^2}$分解为部分分式(不包括分子里的常

数和 z),即

$$\frac{1}{(z+2)(z-1)^2}=\frac{k_1}{z+2}+\frac{k_2}{(z-1)^2}+\frac{k_3}{z-1}$$

并分别求得待定常数 $k_1=\frac{1}{9},k_2=\frac{1}{3},k_3=-\frac{1}{9}$,于是

$$W(z)=\frac{5T}{9}\left(\frac{z}{z+2}+\frac{3z}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}\right)-\frac{z}{z+2}$$

取该式之逆 $\mathscr{Z}$ 变换,得

$$w(t)=\frac{5T}{9}\left[(1-\frac{9}{5T})(-2)^{\frac{t}{T}}+3\frac{t}{T}-1\right]$$

由于 $\mathscr{Z}$ 变换是一个在其收敛域内的连续函数,其反变换是关于 t 的连续函数(如 $w(t)$),而差分方程的解应该是个离散解,于是,由(5-75)得

$$w(t)=\frac{5T}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(1-\frac{9}{5T})(-2)^n+3n-1\right]\delta(t-nT)$$

这是强度变化的脉冲序列,在某一特定的取样时刻 $t=kT$ 时,因变量的值为

$$w(kT)=\frac{5T}{9}\left[(1-\frac{9}{5T})(-2)^k+3k-1\right]$$

关于 $\mathscr{Z}$ 变换再作如下三点说明:

(1) 一般来说取样间隔 T 是固定的;

(2) 这节所推导的公式,只有当抽样时把连续的输入函数变换成宽度为零及强度等于输入函数在抽样时刻的值的一串脉冲时才是正确的;

(3) 抽样频率($\frac{1}{T}$)至少是截频的两倍.

§5.4 希尔伯特(Hilbert)变换

我们已经多次提到,δ-函数的运算性质,无论是在信号处理中,还是在其他的科技领域里,都有广泛的应用.并且,正是因为 δ-函数的这一重要性质,才能使含有 δ-函数的一些较复杂的积分能简便地

积出来.关于这一性质的应用,我们顺手就可以给出例子.

如(3-28)式,利用 δ-函数的运算性质就很容易证明.

设 $F[x(t)]=X(f)$,求证

$$F[x(t)\cos 2\pi f_0 t] = \frac{1}{2}[X(f-f_0)+X(f+f_0)]$$

因为 $x(t)\cos 2\pi f_0 t$ 可以看成是两个函数的乘积,若设 $F[\cos 2\pi f_0 t]=Y(f)$,则有

$$X(f)*Y(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\tau)X(f-\tau)d\tau$$

由(3-14)式知

$$F[\cos 2\pi f_0 t]=Y(f)=\frac{1}{2}[\delta(\tau-f_0)+\delta(\tau+f_0)]$$

所以

$$\begin{aligned}X(f)*Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty}Y(\tau)X(f-\tau)d\tau\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(\tau-f_0)+\delta(\tau+f_0)]X(f-\tau)d\tau\\ &= \frac{1}{2}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-f_0)X(f-\tau)d\tau\\ &\quad+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau+f_0)X(f-\tau)d\tau\Big]\\ &= \frac{1}{2}[X(f-f_0)+X(f+f_0)]\end{aligned}$$

故问题得证.从证明中可见,若没有 δ-函数的运算性质,最后一步的积分是难于积出来的.

下面我们再介绍希尔伯特(Hilbert)变换.它既作为 δ-函数运算性质的应用,又可作为滤波理论的一个例子,同时也给出了分析信号的一种工具.

希尔伯特变换是把一个实信号表示成复信号(即解析信号)的一种变换方法.这不仅从理论上讨论起来得到方便,而且,可以由此来研究更广泛的数字信号处理的问题.这一变换方法最初是从通讯理论中提出来的,目前已被广泛地采用.如在地震勘探、随机振动以及

一些研究非线性信号处理——同态信号的理论中，都有着重要的应用.

那么，什么是希尔伯特变换呢？前节我们讨论 $\mathscr{Z}$ 变换时知道，一个信号序列的 $\mathscr{Z}$ 变换，在其收敛域内是一个解析函数，即在其收敛域内的每一点上都存在着唯一的导数. 同时，解析性还意味着 $\mathscr{Z}$ 变换及其导数在收敛域内是连续函数. 而且，解析函数的实部和虚部满足柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)条件. 这些条件都是对 $\mathscr{Z}$ 变换在其收敛域内有相当强的约束. 此外，还有柯西积分定理的约束，即可用解析区域边界上的函数值来确定解析区域内任何一点的复函数值. 根据解析函数(或者说解析信号)的这些关系，在一定的条件下，我们可以建立其傅氏变换或 $\mathscr{Z}$ 变换的实部和虚部之间，或者是幅度和相位之间的关系，这些关系在不同领域内有不同的名称. 在数学文献中，这些关系通常称为泊松(Poisson)公式；在数字信号处理理论中被称为希尔伯特变换.

5.4.1 实连续信号的希尔伯特变换

为了层次清楚，以下我们分两步来讨论.

(一)实连续信号的复信号表示.

一个简单的余弦信号 $\cos 2\pi f_0 t$(这是一个实连续信号，其中 $f_0>0$)，根据欧拉公式，它可用简单的基本复信号 $e^{i2\pi f_0 t}$和 $e^{-i2\pi f_0 t}$表示为

$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2}(e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t})$$

不难看出，这是因为复信号 $e^{i2\pi f_0 t}$和 $e^{-i2\pi f_0 t}$的虚部互相抵消了的缘故. 当然，我们也可以把 $\cos 2\pi f_0 t$ 表示为另外一种复数形式，即

$$\cos 2\pi f_0 t = \mathrm{Re}\{e^{i2\pi f_0 t}\} \qquad (*)$$

或者

$$\cos 2\pi f_0 t = \mathrm{Re}\{e^{-i2\pi f_0 t}\} \qquad (**)$$

因为一般要求复信号的频率 f 取为正，所以，只取(*)式，并且 $f_0>0$. 称 $e^{i2\pi f_0 t}$为 $\cos 2\pi f_0 t$ 的复信号.

对于任意实连续信号 $x(t)$可做同样讨论.

设实连续信号 $x(t)$ 的频谱为 $X(f)$，则 $X(-f)=\overline{X}(f)$，所以，$x(t)$ 可以表示为

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df \\
&= \int_{0}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df + \int_{-\infty}^{0} X(f)e^{i2\pi ft}df \\
&= \int_{0}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df + \int_{0}^{+\infty} X(-f)e^{-i2\pi ft}df
\end{aligned}
$$

因为 $X(-f)=\overline{X}(f)$，所以

$$
\overline{\int_{0}^{+\infty} X(-f)e^{-i2\pi ft}df} = \int_{0}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df
$$

于是，得

$$
x(t) = 2\int_{0}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df \tag{5-103}
$$

从而，有

$$
x(t) = \mathrm{Re}\left\{\int_{0}^{+\infty} 2X(f)e^{i2\pi ft}df\right\} \tag{5-104}
$$

若令 $g(t)=\int_{0}^{+\infty} 2X(f)e^{i2\pi ft}df$，则称 $g(t)$ 为 $x(t)$ 的复信号. 如果设 $g(t)$ 的频谱为 $G(f)$，则由(5-104)式可知

$$
G(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{当 } f > 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } f \leqslant 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{5-105}
$$

（二）希尔伯特变换

由(5-104)式可知 $G(f)$ 是由 $X(f)$ 滤波得到的，并且，可以将函数

$$
H(f) = \begin{cases} 2 & \text{当 } f > 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } f \leqslant 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{5-106}
$$

看成是滤波器频谱. 于是，有

$$
G(f) = H(f)X(f) \tag{5-107}
$$

由第三章傅氏变换(3-36)式和(5-106)式，其所对应的时间函数 $h(t)$ 不难求得，为

$$
h(t) = \delta(t) + i\frac{1}{\pi t} \tag{5-108}
$$

于是，实信号 $x(t)$ 的复信号 $g(t)$ 表示为

$$g(t)=h(t)*x(t)=(\delta(t)+i\frac{1}{\pi t})*x(t)$$

$$=x(t)+i\frac{1}{\pi t}*x(t)$$

令

$$\bar{x}(t)=\frac{1}{\pi t}*x(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(t)}{t-\tau}d\tau \qquad (5\text{-}109)$$

则称$\bar{x}(t)$为$x(t)$的希尔伯特变换.$h_1(t)=\frac{1}{\pi t}$称为希尔伯特滤波因子.希尔伯特滤波频谱为

$$H_1(f)=\begin{cases}-i, & \text{当 } f>0 \text{ 时}\\ i, & \text{当 } f<0 \text{ 时}\end{cases} \qquad (5\text{-}110)$$

由(5-109)所导出求$x(t)$的公式,即,设$\bar{x}(t)$的频谱为$\overline{X}(f)$,由(5-109)和(5-110)式得

$$\bar{x}(f)=H_1(f)X(f) \qquad (5\text{-}111)$$

将(5-111)式两端都乘以$H_1(f)$,注意$H_1^2(f)=-1$,于是,有

$$X(f)=-H_1(f)\overline{X}(f) \qquad (5\text{-}112)$$

由(5-112)式知$X(f)$的信号函数$x(t)$则是$H_1(f)$和$\overline{X}(f)$所对应的信号函数$h_1(t)$和$\bar{x}(t)$的褶积,即

$$x(t)=-h_1(t)*\bar{x}(t)$$

$$=-\frac{1}{\pi t}*\bar{x}(t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\bar{x}(t)}{t-\tau}d\tau, \qquad (5\text{-}113)$$

(5-113)式称为希尔伯特逆变换公式.通常是把(5-109)和(5-113)式写在一起,统称为希尔伯特变换公式.特别是由这两个式子还可以看到,若$x(t)$的希尔伯特变换为$\bar{x}(t)$,则$\bar{x}(t)$的希尔伯特变换就是$-x(t)$.例如,我们不难证明,信号$\cos 2\pi f_0 t$的希尔伯特变换为$\sin 2\pi f_0 t$,则$\sin 2\pi f_0 t$的希尔伯特变换就是$-\cos 2\pi f_0 t$.

因为$\cos 2\pi f_0 t$的傅氏谱为$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$,经过希尔伯特变换,频谱变为

$$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]H_1(f)$$

$$=\begin{cases}-\frac{i}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)] & \text{当 } f_0>0 \text{ 时} \\ \frac{i}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)] & \text{当 } f_0\leqslant 0 \text{ 时,}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2i}\delta(f-f_0) & \text{当 } f_0>0 \text{ 时} \\ -\frac{1}{2i}\delta(f+f_0) & \text{当 } f_0\leqslant 0 \text{ 时}\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$$

我们由(3-29)式知道这个谱所对应的信号恰好是 $\sin 2\pi f_0 t$,于是结论得证.

5.4.2 实离散信号的希尔伯特变换

设有实连续信号 $x(t)$,当其有截止频率 f_c,抽样间隔 T 满足关系式 $\frac{1}{2T}\geqslant f_c$,经抽样得离散信号序列记为 $x(nT)$,为了求得 $x(nT)$ 的希尔伯特变换 $\tilde{x}(nT)$,可通过对 $x(nT)$ 进行滤波来实现. 若已知连续信号滤波器频谱为(5-110)式,则离散滤波器频谱 $H_t(f)$ 为

$$H_t(f)=H_t(f) \qquad -\frac{1}{2T}\leqslant f\leqslant\frac{1}{2T} \tag{5-114}$$

即离散希尔伯特滤波频谱为

$$H_t(f)=\begin{cases}-i & \text{当 } 0<f\leqslant\frac{1}{2T} \text{ 时} \\ i & \text{当 } -\frac{1}{2T}\leqslant f<0 \text{ 时}\end{cases} \tag{5-115}$$

于是,希尔伯特滤波因子 $h(nT)$ 为

$$h(nT)=T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}}H_t(f)e^{i2\pi nTf}df$$

$$=-iT\int_0^{\frac{1}{2T}}e^{i2\pi nTf}df+iT\int_{-\frac{1}{2T}}^{0}e^{i2\pi nTf}df$$

$$=\begin{cases}0 & \text{当 } n=0 \text{ 时}\\ \dfrac{1-e^{i\pi n}}{\pi n} & \text{当 } n\neq 0 \text{ 时}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{当 } n=0 \text{ 时}\\ \dfrac{1-(-1)^n}{n\pi} & \text{当 } n\neq 0 \text{ 时}\end{cases}$$

或者

$$h(nT)=\begin{cases}0 & \text{当 } n=2k \text{ 时}\\ \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{1}{(2k-1)}=\dfrac{1}{\pi(k-1/2)} & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时}\end{cases}$$

$$(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots) \tag{5-116}$$

又知：

$$H_k(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(nT)e^{-i2\pi nTf}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h((2k-1)T)e^{-i2\pi(2k-1)Tf}$$

$$=\frac{e^{i2\pi Tf}}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k-\dfrac{1}{2}}e^{-i4\pi kTf}$$

$$=\begin{cases}-i & \text{当 } 0<f\leqslant \dfrac{1}{2T} \text{ 时}\\ i & \text{当 } -\dfrac{1}{2T}\leqslant f<0 \text{ 时}\end{cases}$$

由于 $x(nT)$ 为实离散信号，$h(nT)$ 为离散希尔伯特滤波因子，于是，有

$$\bar{x}(nT)=h(nT)*x(nT)=\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty}h(\tau T)x[(n-\tau)T]$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2k-1}x[(n-2k+1)T] \tag{5-117}$$

则 $\bar{x}(nT)$ 称为 $x(nT)$ 的离散希尔伯特变换. 又

$$h(nT)*\bar{x}(nT)=h(nT)*h(nT)*x(nT)$$
$$=-\delta(nT)*x(nT)=-x(nT)$$

所以，离散信号的希尔伯特逆变换公式为

$$x(nT)=-h(nT)*\bar{x}(nT)$$

$$=\frac{-2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2k-1}\bar{x}((n-2k+1)T) \qquad (5\text{-}118)$$

通常将(5-117)和(5-118)式写在一起，称为离散希尔伯特变换对，即

$$\begin{cases} \bar{x}(nT)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2k-1}x[(n-2k+1)T] \\ x(nT)=-\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2k-1}\bar{x}((n-2k+1)T) \end{cases} \qquad (5\text{-}119)$$

其中 $x(nT)$ 和 $\bar{x}(nT)$ 分别为一个复序列的实部和虚部，即若设复序列为 $g(nT)$ 时，则

$$g(nT)=x(nT)+i\bar{x}(nt)$$

$g(nT)$ 称为复信号，由(5-119)式可知，已知 $\bar{x}(nT)$ 可唯一确定 $x(nT)$；有了 $x(nT)$ 和 $\bar{x}(nT)$，则复信号 $g(nT)$ 也就确定出来了.

在希尔伯特变换的讨论中，信号序列具有因果性质是一个重要条件. 所谓序列 $h(n)$ 是因果序列，则有

$$h(n)=0 \qquad 当\ n<0\ 时 \qquad (5\text{-}120)$$

可以验证，因果序列完全由其偶部确定，因为，任何一个序列 $x(n)$ 都可以表示为偶序列 $x_{2m}(n)$ 和奇序列 $x_{2m+1}(n)$ 之和，即

$$x(n)=x_{2m}(n)+x_{2m+1}(n) \qquad (m=1,2\cdots)$$

并且

$$x_{2m}(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)] \qquad (5\text{-}121)$$

$$x_{2m+1}(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)] \qquad (5\text{-}122)$$

有了因果性概念和公式(5-121)、(5-122)二式就可以建立一个函数序列的偶部和奇部的关系，或者说建立起它的变换的实部和虚部之间的关系.

设 $x(n)$ 是因果序列，则有，当 $n<0$ 时 $x(n)=0$；当 $n>0$ 时，$x(-n)=0$，因此，除了 $n=0$ 处之外 $x(n)$ 和 $x(-n)$ 的非零部分之间没有重迭. 如对序列

$$x(n)=\begin{cases}2x_{2m}(n) & \text{当 } n>0 \text{ 时}\\ x_{2m}(n) & \text{当 } n=0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } n<0 \text{ 时}\end{cases} \tag{5-123}$$

和序列

$$x(n)=\begin{cases}2x_{2m-1}(n) & \text{当 } n>0 \text{ 时}\\ x_{2m-1}(n)+x(0)\delta(n) & \text{当 } n=0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } n<0 \text{ 时}\end{cases} \tag{5-124}$$

而言，我们令

$$u^{*}(n)=\begin{cases}2 & \text{当 } n>0 \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } n=0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } n<0 \text{ 时}\end{cases} \tag{5-125}$$

则可将因果序列(5-123)和(5-124)分别写成

$$x(n)=x_{2m}(n)u^{*}(n) \tag{5-126}$$

和

$$x(n)=x_{2m-1}(n)u^{*}(n)+x(0)\delta(n) \tag{5-127}$$

从(5-126)和(5-127)式可以看到，$x(n)$完全可以从$x_{2m}(n)$恢复出来，只有$n\neq 0$时，才能从$x_{2m-1}(n)$恢复$x(n)$.

有了上述结论，若已知因果序列$x(n)$的傅氏变换的实部或虚部及$x(0)$，就完全知道了它的傅氏变换.

设因果序列$x(n)$的谱的实部和虚部分别记为$X_R(e^{i\omega})$和$X_I(e^{i\omega})$，则其傅氏变换$X(e^{i\omega})$的希尔伯特变换公式是

$$\begin{cases} X_I(e^{i\omega})=\dfrac{1}{2\pi}V\cdot P\displaystyle\int_{\pi}^{\pi}X_R(e^{i\theta})\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta-w}{2}\right)d\theta & (5\text{-}128)\\[2ex] X_R(e^{i\omega})=x(0)-\dfrac{1}{2\pi}V\cdot P\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}X_I(e^{i\theta})\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta-w}{2}\right)d\theta & (5\text{-}129)\end{cases}$$

式中$V\cdot P$是表示柯西主值的符号，即

$$X_I(e^{i\omega})=\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{w+\varepsilon}^{\pi}X_R(e^{i\theta})\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta-w}{2}\right)d\theta\right.$$
$$\left.+\int_{-\pi}^{w-\varepsilon}X_R(e^{i\theta})\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta-w}{2}\right)d\theta\right\} \tag{5-130}$$

(5-128)至(5-130)诸式推导较繁索，此处从略.

5.4.3 $\mathscr{Z}$ 变换谱的希尔伯特变换

为了应用上的方便，有时用到 $\mathscr{Z}$ 变换谱的希尔伯特变换. 也就是因果序列 $x(n)$ 若取对数记为 $\hat{x}(n)$ 也是稳定的因果实序列；$\hat{x}(n)$ 的 $\mathscr{Z}$ 变换谱 $\hat{X}(z)$ 在单位圆外处处解析；$X(z)$ 在单位圆外无极点和零点；$\arg[X(e^{iw})]$ 是 w 的连续的奇函数，则对数振幅 $\log|X(e^{iw})|$ 和相位 $\arg[X(e^{iw})]$ 满足关系式

$$\log|X(e^{iw})| = \hat{x}(0) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\arg[X(e^{i\theta})]\text{ctg}\left(\frac{\theta-w}{2}\right)d\theta \tag{5-131}$$

$$\arg[X(e^{iw})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|X(e^{i\theta})|\text{ctg}\left(\frac{\theta-w}{2}\right)d\theta \tag{5-132}$$

亦即，序列 $x(n)$ 满足上述那些条件时，其对数振幅和相位满足(5-131)和(5-132)二式的希尔伯特变换.

当取 $x(n)$ 的 $\mathscr{Z}$ 变换 $X(z)$，并且用振幅与相位表示为

$$X(z) = |X(z)|e^{i\arg[X(z)]}$$

取对数得

$$\hat{X}(z) = \log[X(z)] = \log|X(z)| + i\arg[X(z)] \tag{5-133}$$

将 $\log|X(e^{iw})|$ 和 $\arg[X(e^{iw})]$ 代入(5-128)和(5-129)式便得(5-131)和(5-132)式.

对于已知的 $\log|X(e^{iw})|$，由(5-132)可完全确定 $\arg[X(e^{iw})]$；对于已知的 $\arg[X(e^{iw})]$，从(5-131)式得到 $\log|X(e^{iw})| = \hat{x}(0) + a$，或者是 $|X(e^{iw})| = e^{\hat{x}(0)}\cdot e^{a}$. 其中 a 为任意常数.

在数字信号处理中，希尔伯特变换(5-131)和(5-132)式，常常被称为最小相位条件. 以后我们将用最小相位系统这个术语，来表示其频率响应是最小相位的系统. 即其对数振幅和相位是希尔伯特变换对. 类似地，还可以得出一个最小相位序列，其 $\mathscr{Z}$ 变换也是最小相位的结论，此处都不赘述.

5.4.4 周期序列傅氏谱的希尔伯特变换

对于以 N 为周期的周期序列 $x(n)$（为方便计，不妨设 N 为偶

数)，其因果条件为，当$\frac{N}{2}<n<N$时，$x(n)=0$，根据周期性，在$-\frac{N}{2}<n<0$内，也有$x(n)=0$，因为$x(n)$在每个周期内的后半个周期内为零，所以，$x(-n)$在每个周期的前半个周期内为零. 故，除去$n=0$，$n=\frac{N}{2}$两点外，$x(n)$与$x(-n)$间无重迭部分. 于是得到

$$x(n)=\begin{cases}2x_{2m}(n) & \text{当 } n=1,2,\cdots,(\frac{N}{2}-1)\text{ 时}\\ x_{2m}(n) & \text{当 } n=0,\frac{N}{2}\text{ 时}\\ 0 & \text{当 } n=\frac{N}{2}+1,\cdots,N-1\text{ 时}\end{cases} \quad (5\text{-}134)$$

及

$$x(n)=\begin{cases}2x_{2m-1}(n) & \text{当 } n=1,2,\cdots,(\frac{N}{2}-1)\text{ 时}\\ x(0)\delta(n)+x(\frac{N}{2})\delta(n-\frac{N}{2}) & \text{当 } n=0,\frac{N}{2}\text{ 时}\\ 0 & \text{当 } n=(\frac{N}{2}+1),\cdots,N-1\text{ 时}\end{cases}$$

$$(5\text{-}135)$$

若我们定义周期函数

$$u_N(n)=\begin{cases}1 & \text{当 } n=0,\frac{N}{2}\text{ 时}\\ 2 & \text{当 } n=1,2,\cdots,(\frac{N}{2}-1)\text{ 时}\\ 0 & \text{当 } n=(\frac{N}{2}+1),\cdots,N-1\text{ 时}\end{cases} \quad (5\text{-}136)$$

则(5-134)、(5-135)可分别改写为

$$x(n)=x_{2m}(n)u_N(n) \quad (5\text{-}137)$$

$$x(n)=x_{2m-1}(n)u_N(n)+x(0)\delta(n)+x(\frac{N}{2})\delta(n-\frac{N}{2}) \quad (5\text{-}138)$$

从(5-137)式可看到$x(n)$可由$x_{2m}(n)$得到恢复，此外，$x_{2m-1}(n)$在$n=0$

和 $n=\frac{N}{2}$ 处恒为零. 所以, $x(n)$ 在除去 $n\neq0$ 与 $n\neq\frac{N}{2}$ 两点外也可以由 $x_{2m-1}(n)$ 得到恢复. 于是我们就可以推出周期序列离散傅氏谱的希尔伯特变换为:

$$X_B(k)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}iX_I(m)v_N(k-m)+x(0)+x(\frac{N}{2})(-1)^k$$

其中 $v_N(k)=\begin{cases}N & \text{当 } k=0 \text{ 时}\\ -2i\text{ctg}(\frac{\pi}{N}k) & \text{当 } k \text{ 为奇数时}\\ 0 & \text{当 } k \text{ 为偶数时}\end{cases}$

第六章　δ-函数在振动理论中的应用

所谓振动，就是在物体运动过程中表示运动特征的某些物理量，时而增大，时而减小地反复变化的一种运动. 而振动理论则是用统一的观点，来研究各种物质运动形式中的振动现象. 现代工程的一个重要组成部分，就是分析和预测某物理系统的动力性态(即物体在外力作用下的运动性质和状态). 无论是线性振动、非线性振动，还是随机振动，δ-函数在其中都有着重要的应用. 主要表现在以下三方面：

(1)用 δ-函数表示系统所受的力；

(2)在一定条件下，把持续力表示为无穷多个瞬时力的迭加；

(3)δ-函数的性质的运用.

在这一章里，我们将会看到 δ-函数在表示力的情况时，方法巧妙，新颖别致；在有关振动理论的推导中，由于 δ-函数的性质的运用，就可以把问题化难为易，把方法化繁为简. 这种特殊的作用是任何别的数学工具所无法比拟的.

读者应该注意到，本章不是系统地介绍振动理论本身，而仅仅是介绍 δ-函数在振动理论中的某些应用. 所以，尽管是非常重要的振动理论内容，若与 δ-函数关系不大，我们也不去讨论了.

§6.1　线性系统

前一章，为了讨论数字信号处理的需要，不得不简单地介绍了线性系统的几个概念，但是，在研究振动理论时，线性系统的理论，仍然是讨论问题的出发点. 因此，这里还要深入地讨论线性系统.

线性系统有连续的和离散的区别，这里以讨论连续的线性系统为主.

所以要首先讨论线性系统，那是因为：

(1)振动理论本身就有线性振动与非线性振动之分，所谓线性振动，也就是一个线性系统的振动问题；

(2)绝大多数工程技术里的振动问题，都可以归结为一个线性系统的振动问题；

(3)线性系统已有较为成熟(或者说是标准的)求解方法.

所谓系统，既可以是一个结构或机器，也可以是一座大楼，或者是小小的电路.无论是什么系统，总有一些输入记为 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_s(t)$构成系统的激励，并相应有一些输出 $h_1(t)$，$h_2(t)$，…，$h_n(t)$构成系统的响应(激励与响应的意义如第五章里所述).其中 $x(t)$和$h(t)$可以是力、位移、速度、加速度、电压和电流等，或者是这些量的组合.

线性系统用数学语言来表示，它就是一个线性方程.并且，这种线性方程可以是一个线性的代数方程，线性差分方程，也可以是线性微分方程.一般地表示离散线性系统多用线性差分方程；连续线性系统多数归结为如下微分方程：

$$
\begin{aligned}
& a_n \frac{d^n h_n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} h_{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dh_1}{dt} + a_0 h_0 \\
& = \left\{ \left(b_k \frac{d^k x_1}{dt^k} + b_{k-1} \frac{d^{k-1} x_1}{dt^{k-1}} + \cdots + b_0 x_1 \right) \right. \\
& + \left(c_m \frac{d^m x_2}{dt^m} + c_{m-1} \frac{d^{m-1} x_2}{dt^{m-1}} + \cdots + c_0 x_2 \right) + \cdots \\
& \left. + \left(d_s \frac{d^s x_s}{dt^s} + d_{s-1} \frac{d^{s-1} x_s}{dt^{s-1}} + \cdots + d_0 x_s \right) \right\}. \qquad (6\text{-}1)
\end{aligned}
$$

其中 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$，$b_j(j=0,1,\cdots,k)$，$c_l(l=0,1,\cdots,m)$，…$d_p(p=0,1,2,\cdots,s)$可以是时间 t 的函数，也可以是不依赖于 t 的常数，这时(6-1)式称为常系数线性微分方程. $h_i(t)$，$x_i(t)$分别称为响应和激励，它说明响应 $h(t)$是由激励 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_s(t)$引起的.也就是说微分方程(6-1)的解，便是线性系统的响应.

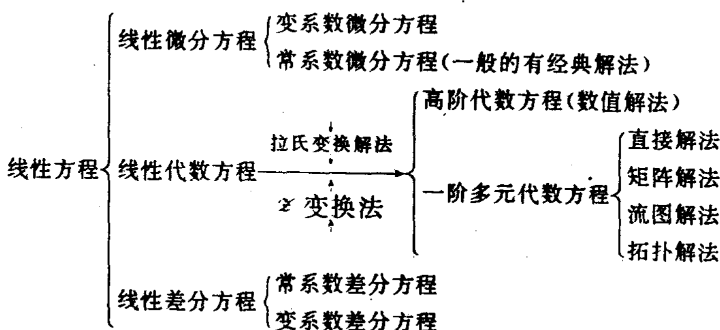
线性系统有符合迭加原理之特性，即若干个激励函数迭加后产生的总的响应，是各个激励函数单独产生的响应的迭加(这一点后

面还要详细讨论和应用)；因此，一个系统是线性的必要条件是它符合迭加原理．若判定一个系统既是线性的又是时不变的，除了判别它是否符合迭加原理外，还要判别输入发生延迟，看输出是否发生同样延迟；或者输入一个调和信号(即调和函数)，看输出是否有其它的频率成分，如果有，就说明系统是非线性时不变系统，这是因为，对一个线性时不变系统输入一个调和信号，则输出一定是由同一频率的调和信号所组成的(这一性质称为线性系统的频率保真性)；或者输入倍增时，看输出是否也倍增，如果不是倍增，则系统也不是线性时不变系统．

为了确定输入与输出之间的关系，我们给出如下三种线性系统的求解方法，即：经典解法、脉冲响应法和频率响应法．

6.1.1 线性方程的经典解法

为了直观，我们把线性方程的类型及典型求解方法以图示如下：



由该图可知，线性微分方程和差分方程往往通过拉氏变换和 $\mathscr{Z}$ 变换的方法，将其转化为线性代数方程求解，而代数方程的解法一般较为容易，因此，本书不去涉及，关于拉氏变换和 $\mathscr{Z}$ 变换法，已分别于第三章和第五章讨论过了，这里也不重复．

线性微分方程的经典解法，除了拉氏变换解法外，还有许多典

型解法，如一阶线性微分方程的公式法，即对微分方程

$$y' + p(x)y = Q(x)$$

有其解的公式为

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right] \tag{6-2}$$

高于一阶的线性微分方程，其通解公式是所对应的齐次方程的通解与一个非齐次方程的特解之和，即对于微分方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_n(x)y = Q(x) \tag{6-3}$$

设 y_1 为方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \tag{6-4}$$

的通解，设 y_2 为(6-3)式的一个特解，则(6-3)式的通解为：

$$y = y_1 + y_2 \tag{6-5}$$

并且，求 y_2 还有待定系数法、视常数为变数法等有效方法，不仅如此，y_1、y_2 还有明显的物理意义，即 y_1 称为余函数，它表示系统的暂态响应，而且完全决定于系统本身元件的类型、量值、排列方法等；y_2 称为特积分，它表示系统的稳态响应，它不仅与系统本身有关，而且也与激励有关.

特别是 n 阶齐次线性微分方程所表示的振动现象叫做自由振动，如果不计阻力，它是一个简谐振动方程.若系统还受有外力的作用，这里便得到(6-3)式的 n 阶非齐次线性微分方程，它所表示的振动现象叫做强迫振动.我们知道，研究在给定的激励作用下系统的性态，是由这些激励所产生的运动来表示，通常称为该系统的响应.如果激励表现为初始位移或初始速度时，求系统的响应.这时，在数学上表示为线性齐次微分方程，在物理上叫做自由振动；同样，求激励表现为外部作用力的响应，数学上表现为非齐次线性微分方程，物理上叫做强迫振动.

上述内容，在高等数学的微分方程里，以及普通物理中都有论述，这里就不详细讨论了.

总之，一般的线性系统都可以归结为线性微分方程问题，特别是经常遇到的是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{6-6}$$

的初值问题，或者是偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t) \tag{6-7}$$

的边值问题(或初值问题及混合问题). 这就是一个线性系统的基本特征，并且(6-6)式的上述解法也在各工程技术中被广泛地应用. (6-7)式也有所谓分离变量法、积分变换法、格林函数法等典型解法，被广泛地使用. 这些经典解法虽说不是万能的，但是，一般的工程技术问题大多数都能得到解决(下一节里，我们将给出一些具体的例子).

6.1.2 脉冲响应法

所谓脉冲响应法，就是测定系统经适当扰动后的瞬态响应，并由此来确定系统动态特性的一种方法.

输入为脉冲函数 $\delta(t)$时的输出 $h(t)$称为脉冲响应. 同时，把脉冲响应 $h(t)$的傅氏变换 $H(f)$称为传递函数，即

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-ift} dt \tag{6-8}$$

其中，f 为频率.

在线性系统的讨论中，积分变换里的褶积定理起着相当重要的作用，也就是输入信号 $f(t)$与输出信号 $g(t)$满足如下关系式

$$g(t) = f(t) * h(t) \tag{6-9}$$

这说明输出信号等于输入信号与脉冲响应的褶积. 由傅氏变换理论可知，若设

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ift} dt \tag{6-10}$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-ift} dt \tag{6-11}$$

则有

$$G(f) = F(f)H(f) \tag{6-12}$$

并且，(6-9)式和(6-12)式中，任意知道一个即可求出另一个.

(6-9)式的证明是不难的，只要将一个持续时间有限的连续函数，等效地看成一系列紧密排列的有适当强度的 δ-函数即可. 事实上，在系统上的一脉冲序列就是在某个时刻 t_i 的脉冲强度为$f(t_i)$，若单位时间内的脉冲数无限增加，则输入就趋于 $f(t)$. 由于系统是线性时不变的，所以，相应输入 $\sum_{i=1}^{\infty} f(t_i)\delta(t-t_i)$ 的输出，就是 $\sum_{i=1}^{\infty} f(t_i)h(t-t_i)$. 当脉冲数目无限增多，而脉冲间隔趋于零的极限，则 $f(t_i)$ 的求和就变成了对 $f(t)$ 的积分. 即，相应于输入 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1)\delta(t-t_1)dt_1$的输出为$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1)h(t-t_1)dt_1$. 由 δ-函数的运算性质，可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1)\delta(t-t_1)dt_1 = f(t)$$

而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1)h(t-t_1)dt_1 = f(t) * h(t)$$

所以，得到相应于输入 $f(t)$的输出便是 $f(t) * h(t)$. 用 $g(t)$表示 $f(t)$ 的输出，则(6-9)式得证. 再由褶积定理可知，(6-12)式亦成立.

传递函数(6-8)式，只是表达了系统本身的特性，而与激励及系统的初始状态无关. 特别是它不表明系统的物理性质. 许多性质不同的物理系统，可以有相同的传递函数. 而传递函数不相同的物理系统，即使是系统的激励相同，其响应也未必相同. 因此，对传递函数的分析和研究就能统一处理各种物理性质不同的线性系统. 如(6-9)式告诉我们，无论是力学的、电学的，还是其它科技领域内的结构系统，只要是线性时不变的系统，则一旦知道了系统的脉冲响应，对任意的输入，都可用该输入与系统的脉冲响应之褶积算出其输出来. 也就是如果我们自终止扰动的瞬时起，直到系统重新恢复静平衡为止的整个过程中，测出系统的瞬态响应(即脉冲响应)，就能由此确定出系统的动态特性.

6.1.3 频率响应法

所谓频率响应法，就是输入一个简谐信号，或者是阶跃信号，通过对在一系列间距很小的频率上进行测试，那么，系统的动态特性也就完全确定了.

在 6.1.2 中，可以看到，求得某系统的脉冲响应是重要的，但是，求脉冲响应法，一种是如在 6.1.2 里所述，即对系统施加一个尽可能逼真的脉冲输入，然后测量其响应. 然而，这种方法在实际上未必可行. 于是，还可采用另一种方法——频率响应法.

以下就简谐输入和阶跃输入的两种情况，分别进行讨论.

如下三个式子，都指出了相应于简谐输入的输出*

$$F[e^{if_0t}] = H(f_0)e^{if_0t} \tag{6-13}$$

$$F[\cos f_0t] = A(f_0)\cos(f_0t + \varphi(f_0))] \tag{6-14}$$

$$F[\sin f_0t] = A(f_0)\sin(f_0t + \varphi(f_0))] \tag{6-15}$$

其中 $A(f)$和 $\varphi(f)$是实数量，它们和 $H(f)$的关系是

$$H(f) = A(f)e^{i\varphi(f)} \tag{6-16}$$

即 $A(f)$为振幅谱，$\varphi(f)$为相位谱.

因为，在(6-13)式中，设 $f(t)=e^{if_0t}$，再根据(6-12)式，有

$$G(f) = 2\pi H(f)\delta(f - f_0) \tag{6-17}$$

其中 $G(f)$为(6-13)式中输出 $g(t)$的谱. 取(6-17)式的傅氏逆变换，便得出 $g(t)$. 再由傅氏变换理论，不难推得(6-13)式. (6-14)、(6-15)二式又分别是(6-13)式的实部和虚部. 因此，若对系统加上不同频率的正弦或余弦函数，并从输出的振幅增益和相位补偿的测量中得到 $A(f)$和 $\varphi(f)$，再由(6-16)式可直接算出$H(f)$. 并将$H(f)$代入(6-8)式，然后取其逆变换，即可求得简谐输入相应的脉冲响应 $h(t)$.

现在考虑输入阶跃函数

---

* 若输入函数还具有"因果性"时，即当 $t<0$ 时，$f(t)=0$，则也可以应用拉氏变换，都不影响整个的讨论.

$$u(t)=\begin{cases}1 & \text{当 } t>0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } t<0 \text{ 时}\end{cases}$$

时，脉冲响应的求法.

我们把输入阶跃函数的输出 $b(t)$，称为阶跃响应. 若 $b(t)$的傅氏变换记为 $B(f)$时，则有

$$B(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}b(t)e^{-ift}dt \tag{6-18}$$

下面来分析 $b(t)$与 $B(f)$和 $h(t)$与 $H(f)$之间的关系.

根据(6-9)式，有

$$\begin{aligned}b(t)&=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t-t_1)h(t_1)dt_1\\&=\int_{-\infty}^{t}h(t_1)dt_1\end{aligned} \tag{6-19}$$

于是，得

$$h(t)=\frac{d}{dt}b(t) \tag{6-20}$$

也就是说，阶跃响应的微商恰是脉冲响应. 回忆第三章里讨论的阶跃函数的微商恰是 δ-函数的结论，则不难理解(6-20)式. 由褶积定理及阶跃函数的傅氏变换(3-36)式，知

$$\begin{aligned}B(f)&=H(f)B(f)=H(f)\left[\pi\delta(f)+\frac{1}{if}\right]\\&=\pi H(0)\delta(f)-\frac{iH(f)}{f}\end{aligned} \tag{6-21}$$

于是，有

$$H(f)=ifB(f) \tag{6-22}$$

其中(6-21)式里，已假定在 $f=0$ 处不包括 δ-函数. 因为这样一个 δ-函数将对应一个随着时间一直继续下去的阶跃响应 $b(t)$. 所以，这种假定在物理上是妥当的. 如果不考虑奇点的情况下，根据傅氏变换的性质 3.3(即(3-16)式)也可直接得到(6-22)式.

以下举几个例子，来具体地说明上述方法.

例 6.1 对两端 LRC 回路，只考虑电容器，这时以电流 $I(t)$为输入，电压 $V(t)$为输出. 我们可以通过求脉冲响应 $h(t)$和传递函数

$H(f)$来找出电流和电压之间的关系.

脉冲电流 $I(t)=\delta(t)$，相当于在电容上突然加上单位电荷. 由于电容 C 的定义是电荷与电压之比，所以，这就相当于在电容器上突然出现一个电压 $1/C$，因而得脉冲响应为

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{C} & \text{当 } t\geqslant 0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } t<0 \text{ 时}\end{cases}$$

它的傅氏变换即为传递函数 $H(f)$，由(3-36)式可得

$$\begin{aligned}H(f)&=\frac{\pi}{C}\delta(f)-\frac{i}{fC}\\&=\frac{\pi}{C}\delta(f)+\frac{1}{fC}e^{-i\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

再由(6-9)和(6-12)式，便可从任何 $I(t)$去计算 $V(t)$了. 为了保证在 $t<0$时有 $h(t)=0$. 所以在 $H(f)$的表达式中必须有 δ-函数，否则，就相当于在整个时间过程中于输出端加上一个负电压了.

例 6.2 我们来考虑二端 LRC 回路的电感 L，这时输入电流为 $I(t)$，输出电压为 $V(t)$，比例题 6.1 要绕点弯子，因为脉冲电流会使电压产生一个奇点，从而使人不易理解. 我们换成阶跃输入，即

$$I(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t<0 \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } t>0 \text{ 时}\end{cases}$$

根据电感 L 的定义，支配电感的公式为

$$V(t)=L\frac{dI}{dt}$$

于是，对于 $I(t)$所给出的阶跃输入，其电压响应为

$$b(t)=L\delta(t)$$

对该式作傅氏变换，得

$$B(f)=L$$

又由(6-22)式可得传递函数为

$$H(f)=ifL$$

可见只要知道电感 L，可求出传递函数，然后根据(6-9)和(6-12)式，便可从任何电流 $I(t)$算出电压 $V(t)$来.

§6.2 用 δ-函数表示系统所受的力

在许多科学技术中，运用 δ-函数来表示系统所受的力，既方便，又有利于求解.特别是在振动理论中，尤其是如此.如当 $t=t_0$ 时，系统受一个脉冲力，其强度是 F，这时，人们常常用 $F\delta(t-t_0)$来表示.这种表示，就是在 $t=t_0$ 时，系统受力，而在其它时刻，系统受力均为 0.这种表示法很有适用价值，下面几个例子充分说明了这一点.

例 6.3 设有一重量为 W 的物体，悬挂在弹性系数为 K 的弹簧上，并处于静止状态，在 $t=0$ 时，开始受一力 F 的作用，求物体运动的规律.

解 不难看到，当 y 是任一瞬时时刻，物体到静平衡位置的距离时，则物体运动之规律，可表示为如下的微分方程

$$\frac{W}{g}\frac{d^2y}{dt^2}+ky=Fu(t)$$

其中 $u(t)$是单位阶跃函数($Fu(t)$是表示当 $t<0$ 时，外力为 0).这个二阶常系数微分方程，用拉氏变换法是容易求得其解的.如果在 $t=0$ 时，该系统受一个脉冲力 $F\delta(t)$时，则所给方程变为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega y=\frac{Fg\delta(t)}{W}$$

其中 $\omega=\frac{kg}{W}$，两端取拉氏变换，得

$$L[y]=\frac{Fg}{W}\frac{1}{s^2+\omega^2}$$

再取逆变换，有

$$y=\frac{Fg}{W\omega}\sin\omega t$$

从这一结果可知，物体受脉冲力后作频率为 $\omega/2\pi$ 的谐振动.

例 6.4 设有均匀柔软的弦线，在某一点处受到一个冲量而产生自由振动，求振动的规律.

解 (1)若弦是无限长的. 位置函数设为 $u(x,t)$，在点 $x=x_0$ 处受到初始冲击，其强度为 I，因为这个冲量是"瞬时"出现的，所以，这个冲量可表示为 $I\delta(x-x_0)\Delta x$. 其中 Δx 为任意小的一段. 由动量原理知

$$\rho\Delta x = (u_t|_{t=0} - 0) = I\delta(x-x_0)\Delta x$$

所以，当 $\Delta x\to 0$ 时，有初始速度为

$$\psi(x) = u_t|_{t=0} = \frac{I}{\rho}\delta(x-x_0)$$

于是，这个定解问题可写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty,\ a^2 = l/\rho \quad t>0) \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \dfrac{I}{\rho}\delta(x-x_0) \end{cases}$$

这个定解问题，由达朗贝尔公式，可得其形式解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi = \frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)d\xi - \int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)d\xi\right]$$

又由

$$\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{I}{\rho}\delta(\xi-x_0)d\xi = \frac{I}{2a\rho}\int_{-\infty}^{x}\delta(\xi-x_0)d\xi$$

及 δ-函数的性质 1.9

$$\int_{\infty}^{x}\delta(\xi-x_0)d\xi = \begin{cases} 0 & 当\ \xi < x_0\ 时 \\ 1 & 当\ \xi > x_0\ 时 \end{cases}$$

若设

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & 当\ x < 0\ 时 \\ 1 & 当\ x > 0\ 时 \end{cases}$$

则

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(\xi-x_0)d\xi = \theta(x-x_0)$$

从而得原定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{I}{2a\rho}\left[\theta(x+at-x_0) - \theta(x-at-x_0)\right]$$

(2)若弦是半无限长. 这时，坐标原点选在弦的始点上，x 轴与

弦重合，并设弦沿 x 轴的正方向上所受的张力为 T，位移函数为 $u(x,t)$，并且，初始条件设为 $u|_{t=0}=f(x)$ $u_t|_{t=0}=\psi(x)$，于是，可知，弦的横振动规律是如下定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x\geqslant 0,\ a^2=\frac{T}{\rho}\quad t>0)\\ u|_{t=0}=f(x), & u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

的解. 显然，这是一个初值问题，其解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \qquad (6\text{-}23)$$

(3)若弦为有限长的自由振动. 设弦的初始位置和 x 轴重合，并且，两个端点分别为 $x=0$ 和 $x=l$，位移函数为 $u(x,t)$，初始条件为 $u|_{t=0}=\varphi(x)$，$u_t|_{t=0}=\psi(x)$. 这时，可知，其振动方程为

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t>0,\ 0\leqslant x\leqslant l,\ a^2=\frac{T}{\rho})\\ u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0 & \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x) & (0\leqslant x\leqslant l)\end{cases}$$

这是齐次方程的混合问题，其解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{2}{l}\Big(\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi\Big)\cos\frac{n\pi}{l}at$$
$$+\frac{2}{n\pi a}\Big(\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi\Big)\sin\frac{n\pi}{l}at\Big]\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (6\text{-}24)$$

(4)若弦为有限长的强迫振动. 我们知道，弦线的受迫振动与自由振动，只是在泛定方程中差一个外力作用项，即设弦线于 $x=b$ 点处受到一个集中力 $\theta(x,t)=\frac{F(t)}{T}\delta(x-b)$ 的作用，其它如(3)中所设，这个弦的振动规律便是定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F(t)}{T}\delta(x-b) & (t>0,\ 0\leqslant x\leqslant l,\ a^2=\frac{T}{\rho})\\ u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0 & \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x) & (0\leqslant x\leqslant l)\end{cases}$$

在解这个定解问题时，与(3)的解法相类似，只是多出一项，记为 $\theta_x(x,t)$，即

$$\theta_s(n,t) = \frac{F(t)}{T}\int_0^l \delta(\frac{l\xi}{\pi} - b)\sin(n\xi)d\xi = \frac{F(t)}{T}\sin(\frac{n\pi b}{l})$$

从而得到

$$u(x,t) = \frac{2al}{\pi^2 T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi x}{l})\sin(\frac{n\pi b}{l})\int_0^t F(\xi)\sin(\frac{n\pi c(t-\tau)}{l})d\xi \tag{6-25}$$

关于用 δ-函数表示系统所受的力，要根据不同形式的力，采用不同的表示方法. 如有一个变动的力，记为 $\psi(t)$，作用在长为 l 的某梁的 $x=x'$ 点处，那么，梁的单位长度上所受的载荷 $p(x,t)$，就可以表示为 δ-函数的如下形式

$$p(x,t) = \psi(t)\delta(x - x') \qquad (0 < x' < l)$$

假若作用力是一个集中力，它的作用点，在长为 l 的梁上以速度 v 而作等速运动，那么，载荷 $p(x,t)$ 又可表示为

$$p(x,t) = \begin{cases} \psi(t)\delta(x - vt) & (0 \leqslant vt \leqslant l) \\ 0 & vt > l \end{cases}$$

上述诸问题，都是就一维情形讨论的. 这时系统所受的脉冲力，一般用 $\delta(x)$ 或 $\delta(x-x_0)$ 再乘以冲量强度即可表示出来. 对于二维或三维以上的系统所受的脉冲力，用 δ-函数也可以表示出来. 只要注意第一章里高维 δ-函数的性质 1.13 和推论 1.13 即可.

如矩形膜的振动中，设有一个膜，它在平衡的位置下，占有平面 $z=0$ 内的矩形

$$0 \leqslant x \leqslant a;\ 0 \leqslant y \leqslant b,$$

且于该矩形内某一点 (p,q) 处，施以一个垂直于膜的冲量 I. 这时，表示这个冲量，则可用二维 δ-函数表示，即

$$g(x,y) = \frac{I}{\sigma}\delta(x - p)\delta(y - q)$$

其中 $0 \leqslant p \leqslant a$，$0 \leqslant q \leqslant b$，而 σ 是膜的面密度.

又如空间某物体——为了便于推导方程，不妨设为一个厚的弹性柱体或者厚的弹性球体，且占有某个空间区域为

$$0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c$$

如果在该物体的某点(p,q,r)处，受到一个瞬时力 F_0 作用，则这个力可表示为

$$g(x,y,z)=F_0\delta(x-p)\delta(y-q)\delta(z-r)$$

将这个力的表达式代入物体受该力而产生振动的振动方程里，便可求出物体的振动规律.

我们不再重复这些类似的表达式，读者只要掌握这一规律，一般所遇到的力均能表示出来. 下面给出一个二维的例子.

例 6.5 如图 6-1，一个受弯曲的均匀梁，两端铰支，在 $x=l/4$ 处受脉冲力冲击，求其响应.

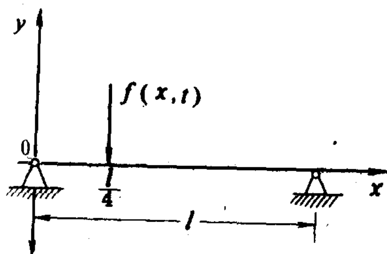


图 6-1

解 如图取坐标系 xoy，位移函数设为 $y(x,t)$，脉冲力的强度为 F_0. 显然，这个作用力不仅与位置有关，而且与时间有关，所以，设 $f(x,t)$表示该力，则有

$$f(x,t)=F_0\delta(t)\delta(x-\frac{l}{4}) \tag{6-26}$$

由力学原理可知梁的振动方程为

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]+f(x,t)$$

$$=m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{6-27}$$

其中 E 是弹性模量，$I(x)$为梁的截面惯性矩，$m(x)$为梁的分布质量，为了简便，设 $I(x)$，$m(x)$均为常数. 并设初始条件为 $y(x,0)=y_t(x,0)=0$，边界条件为 $y(0,t)=y(l,t)=0$. 即得偏微分方程定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] + F_0\delta(t)\delta(x - \dfrac{l}{4}) \\ y(0,t) = y(l,t) = 0 \\ y(x,0) = y_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

求这个定解问题，可用一般偏微分方程书中的典型解法——分离变量法来解，即设变量已分离的解为 $y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X(x)T(t)$，先解特征方程

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = Q(t) \tag{6-28}$$

其中

$$Q(t) = \int_0^l F_0\delta(t)\delta(x - \frac{l}{4})X(x)dx$$

ω 为固有频率. 对于无阻尼单自由度系统(6-28)式的解为

$$T(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t Q(\tau)\sin\omega(t - \tau)d\tau$$

$$+ T(0)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}T'(0)\sin\omega t \tag{6-29}$$

当激励力 $f(x,t)$ 为零时，方程(6-27)经分离变量解法得到的另一特征方程为

$$EI\frac{d^4X}{dx^4} = \omega^2 mX(x) \tag{6-30}$$

由

$$\omega = (n\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

则其解为

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{ml}}\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

从而，用 δ-函数表示的激励 $f(x,t)$ 经过变换后得

$$Q(t) = \int_0^l F_0\delta(t)\delta(x - \frac{l}{4})\sqrt{\frac{2}{ml}}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=F_0\delta(t)\sqrt{\frac{2}{ml}}\int_0^l\delta(x-\frac{l}{4})\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=F_0\sqrt{\frac{2}{ml}}\sin\frac{n\pi}{4}\delta(t) \tag{6-31}$$

将(6-31)式代入(6-29)式并注意初始条件，得

$$T(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t F_0\sqrt{\frac{2}{ml}}\sin\frac{n\pi}{4}\delta(t)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{\omega}F_0\sqrt{\frac{2}{ml}}\sin\frac{n\pi}{4}\sin\omega t \tag{6-32}$$

故，所求之响应为

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X(x)T(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{ml}}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\frac{1}{\omega}F_0\sqrt{\frac{2}{ml}}\sin\frac{n\pi}{4}\sin\omega t$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2F_0l}{n^2\pi^2\sqrt{mEI}}\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\omega t$$

§6.3 持续力表示为瞬时力的迭加

本书的第一章里，在叙述 δ-函数的物理意义时，曾给出位于空间内某点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$，而质量为 m 的质点，密度可记为 $m\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$；若位于 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 点而电量为 q 的点电荷的电荷密度可记为 $q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$；若作用于瞬时 t_0 时刻而冲量为 F 的瞬时力也可记为 $F\delta(t-t_0)$ 等等. 所以说连续分布的质量、电荷或持续力，也可以用 δ-函数来表示.

在振动理论中，一个振动系统受到外力作用，产生强迫振动，其外力或者是瞬时力，或者为持续力. 当系统受到瞬时力的作用，求其振动规律时，前面已有多例可见. 当系统受到持续力作用时，也在第二章杜哈美原理里陈述过，即把在某时间间隔中的持续力看作许许多多前后相继的瞬时力. 特别是把连续分布在空间中的外力，看作鳞次栉比排列着的许许多多点上的作用力. 也就是将持续的外

力转化为瞬时力的迭加. 设 $F(t)$ 为持续力，持续的时间不妨设为从 $t=a$ 到 $t=b$. 于是，我们将区间 $[a,b]$ 分割成许多小时间段，在某个从 τ_i 到 $\tau_i+d\tau$ 的时间段内，力 $F(\tau_i)$ 的冲量是 $F(\tau_i)d\tau$，由于 $d\tau$ 很短，所以，就把这段短时间内的作用力看作是瞬时力，由 § 6.2 的讨论可知，该瞬时力可表示为

$$F(\tau_i)\delta(t-\tau_i)$$

这许许多多瞬时力的迭加，就是持续力 $F(t)$，即

$$F(t)=\sum_{i=1}^{n}F(\tau_i)\delta(t-\tau_i)d\tau=\int_a^b F(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

上述设想所以能在线性振动理论中实现，那是因为线性振动系统有符合迭加原理的重要性质. 即若干个激励单独对系统产生的总响应(或者说是总的效应)，是各个激励对系统产生的响应的迭加，特别是这若干个激励，无需加在系统的同一部分里，因为一个激励的存在并不影响另一个激励引起的响应. 正因如此，我们为了分析线性系统受多个激励产生的总的响应，可以先分析单个激励所产生的响应，然后把这些响应迭加起来，就等于总的响应. 这样就可以使问题由复杂变为简单，为我们处理许多复杂的振动问题，提供了方便.

我们还能进一步看到，作用在点 ξ 和时刻 τ 的外力 $f(x,t)$ 可以记为

$$f(x,t)=\int_0^t\int_0^l \rho f(\xi,\tau)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)d\xi d\tau \qquad (6\text{-}33)$$

若对两端点固定的弦振动问题而言，根据第四章的讨论可知，作用在点 ξ 和时刻 τ 的瞬时力 $\rho\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)d\xi dt$ 所引起的振动 $G(x,t;\xi,\tau)$ 的定解问题是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) & (6\text{-}34)\\ G|_{x=0}=0,G|_{x=l}=0 & (6\text{-}35)\\ G|_{t=0}=0,\ G_t|_{t=0}=0 & (6\text{-}36)\end{cases}$$

该定解问题又可以转化为定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 & (6\text{-}37) \\ G|_{x=0} = 0,\ G|_{x=l} = 0 & (6\text{-}38) \\ G|_{t=\tau+0} = 0,\ G_t|_{t=\tau+0} = \delta(x-\xi) & (6\text{-}39) \end{cases}$$

而解出来. $G(x,t;\xi,\tau)$是作用在一个点上的瞬时力所引起的振动. 所以 G 称为两端固定弦受迫振动的格林函数. 显然(6-37)～(6-39)式的解 G 解出后，由迭加原理可知，任意外力 $F(x,t)=\rho f(x,t)$作用下的强迫振动规律便是

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l f(\xi,\tau) G(x,t;\ \xi,\tau) d\xi d\tau \qquad (6\text{-}40)$$

例 6.6 设长度为 l，两端固定的梁在 $x=x_0$ 点处受到外力为 $F_0\cos\dfrac{n\pi}{l}\sin\omega t$ 而振动，求解梁的振动规律.

解 这个定解问题可转化为先对定解问题

$$(A)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_0\cos\dfrac{n\pi}{l}\sin\omega t & (t>0,\ 0<x<l) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 & (t \geqslant 0)) \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0 & (0 \leqslant x \leqslant l) \end{cases}$$

求格林函数 $G(x,t;\xi,\tau)$，即解定解问题

$$(B)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \\ G|_{x=0} = 0, G|_{x=l} = 0 \\ G|_{t=0} = 0, G_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

而定解问题(B)又由杜哈美原理可转化为如下定解问题

$$(C)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} \\ G|_{x=0} = 0,\ G|_{x=l} = 0 \\ G|_{t=\tau+0} = 0,\ G_t|_{t=\tau+0} = \delta(x-\xi) \end{cases}$$

定解问题(C)的解的一般形式为

$$G(x,t;\xi,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[A_n(\xi,\tau)\cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l} + B_n(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l} \Big] \cos\frac{n\pi x}{l}$$

其中系数 $A_n(\xi,\tau)$和 $B_n(\xi,\tau)$由初始条件确定，即

$$\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\xi,\tau)\cos\frac{n\pi x}{l}=0\\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\xi,\tau)\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}=\delta(x-\xi)\end{cases}$$

将上式右端的 $\delta(x-\xi)$也展开为傅氏余弦级数，即

$$\delta(x-\xi)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{C_n}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

并比较两端系数，得

$$A_n(\xi,\tau)=0,\ B_n(\xi,\tau)=\frac{2}{n\pi a}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\qquad(n\neq 0)$$

从而，格林函数为

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{l}(t-\tau)+\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

于是，由(6-40)式可知定解问题(A)的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t\int_0^l f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau\\
&=\frac{1}{l}\int_0^t\int_0^l(t-\tau)F_0\cos\frac{\pi\xi}{l}\sin\omega\tau d\xi d\tau+\frac{2F_0}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi x}{l}\\
&+\frac{2F_0}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi x}{l}\int_0^t\int_0^l\cos\frac{\pi\xi}{l}\sin\omega\tau\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi d\tau\\
&=\frac{2F_0}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi x}{l}\int_0^l\cos\frac{\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\int_0^t\sin\omega\tau\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau\end{aligned}$$

对 ξ 积分当 $n\neq1$ 时为 0，当 $n=1$ 时，这个积分的值等于$\frac{l}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{F_0 l}{\pi a}\cos\frac{\pi x}{l}\int_0^t\sin\omega t\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}d\tau\\
&=\frac{F_0 l}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-\pi^2a^2/l^2}\left(\omega\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi x}{l}\end{aligned}$$

例 6.7 如图 6-2，一个等剖面简支梁，承受轴向拉力 N 和在 $x=\xi$ 点处有一单位集中横向载荷 $P=1$ 的平衡问题. 梁的挠度 $\omega(x)$满足下列定解问题

$$\begin{cases} EJ\dfrac{d^4\omega}{dx^4} - N\dfrac{d^2\omega}{dx^2} = q(x) \\ \omega(0) = \omega(l) = 0 \\ \left.\dfrac{d^2\omega}{dx^2}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{d^2\omega}{dx^2}\right|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{6-41}$$

其中 EJ 表示梁的弯曲刚度，$q(x)=\delta(x-\xi)$，求梁的挠度 $\omega(x)$.

解 上述边界条件表明，将 $\omega(x)$展开成正弦级数，即

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

式中 a_n 是待定系数，将 $\omega(x)$的展式代入(6-41)式，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^4\pi^4}{l^4}EJ + \frac{n^2\pi^2}{l^2}N\right)a_n\sin\frac{n\pi x}{l} = \delta(x-\xi) \tag{6-42}$$

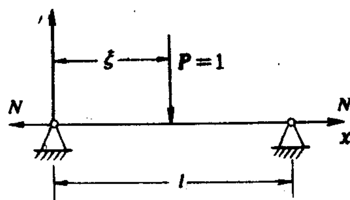


图 6-2

把 $\delta(x-\xi)$也展成正弦级数，得

$$\delta(x-\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6-43}$$

其中

$$b_n = \int_0^l \delta(x-\xi)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \sin\frac{n\pi\xi}{l}$$

于是

$$\delta(x-\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6-44}$$

将(6-44)式代入(6-42)式，然后比较等式两端同类项的系数，得

$$a_n = \frac{2}{l}\,\frac{1}{\dfrac{\pi^4 EJ}{l^4}n^4 + \dfrac{\pi^2 N}{l^2}n^2}\sin\frac{n\pi\xi}{l}$$

从而，所求之挠度 $\omega(x)$为

$$\omega(x) = \frac{2l^3}{\pi^4 EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi\xi}{l}\sin\dfrac{n\pi x}{l}}{n^4\left(1+\dfrac{Nl^2}{n^2 EJ\pi^2}\right)}$$

在许多工程上，所见之系统多是结构上作用有集中载荷的情况，求它的解，多数离不开 δ-函数及其性质. 例如一个变剖面梁(如图 6-3)，承受轴向拉力 N，分布横向载荷 $q(x)$以及 $x=\xi$ 处集中弯矩 $\overline{M}_\xi$ 的作用，由力学理论可知，梁的总势能 Π 表示为

$$\Pi=\int_0^l\left\{\frac{1}{2}EJ\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2+\frac{1}{2}N\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2-q(x)\omega\right\}dx+\overline{M}_\xi\omega'(\xi) \tag{6-45}$$

若把单位集中载荷看作是分布载荷，它的表达式是

$$q(x,\xi)=\delta(x-\xi)$$

集中力矩 $\overline{M}_\xi$ 可以被看成是由两个方向相反无限靠拢的集中力组成的(如图 6-3). 规定 $\overline{M}_\xi$ 的逆时针方向为正，于是，应有

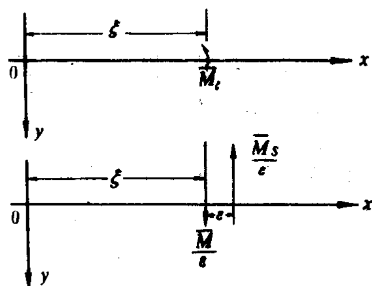


图 6-3

$$\begin{aligned}q_M(x,\xi)&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\overline{M}_\xi}{\varepsilon}\{\delta(x-\xi)-\delta[x-(\xi+\varepsilon)]\}\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\left\{-\overline{M}_\xi\frac{\delta[x-(\xi+\varepsilon)]-\delta(x-\varepsilon)}{\varepsilon}\right\}\\&=-\overline{M}_\xi\delta'(x-\xi)\end{aligned}$$

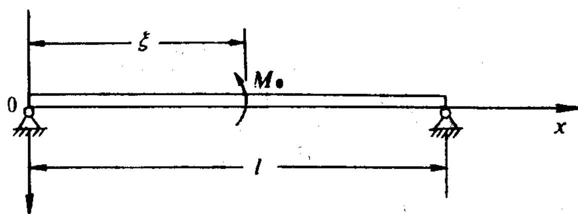


图 6-4

将此“广义”的分布载荷并入原有的分布载荷 $q(x)$中，(6-45)式就可以改写成

$$\Pi=\int_0^l\left\{\frac{1}{2}EJ\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2+\frac{1}{2}N\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2-q^*(x)\omega\right\}dx$$

其中 $q^*(x)=q(x)-\overline{M}_\xi\delta'(x-\xi)$. 这样就给问题的求解带来很大方便.

振动理论在工程建筑中，经常要分析建筑材料(比如某梁内)在外载荷作用下其剪力和弯矩的分布情况，以便判断出梁中的危险截面，有利于进行强度控制. 利用第一章所列的 δ—函数的性质 7.10，对具体问题把弯矩和剪力的关系从数学上联系起来就可得到完美的结果. 请看下面例题：

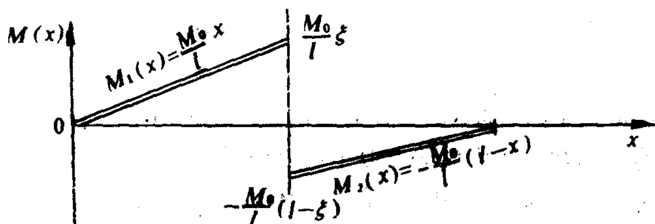


图 6-5

例 6.8　考虑一个简支梁上作用有沿梁移动的集中力偶，如图 6-4 所示. 按静力平衡规律，则易求得梁内弯矩的分布(如图 6-5)和剪力的分布(如图 6-6).

通常在集中力偶作用点处，梁内弯矩往往是从强度设计的要求出发人为定义的(一般都是以作用点两侧极邻近的截面上较大弯矩者作为该截面上的内弯矩).

于是，梁上弯矩函数可以写为

$$M(x)=\begin{cases}\dfrac{M_0}{l}x & \text{当 } x<\xi \text{ 时}(0\leqslant\xi\leqslant l)\\[2ex] -\dfrac{M_0}{l}(l-x) & \text{当 } x>\xi \text{ 时}(0\leqslant\xi\leqslant l)\end{cases}\tag{6-46}$$

在梁上取微元体，列静力平衡方程，可知，弯矩 $M(x)$ 与剪力函

数 $V(x)$刚好构成关系式

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \tag{6-47}$$

利用 δ-函数性质 1.9，就可以容易地把剪力函数 $V(x)$表示出来

$$V(x) = M'(x) = C\delta(x-\xi) + \begin{cases} \dfrac{M_0}{l} & \text{当 } x<\xi \text{ 时} \\ \dfrac{M_0}{l} & \text{当 } x>\xi \text{ 时} \end{cases} \tag{6-48}$$

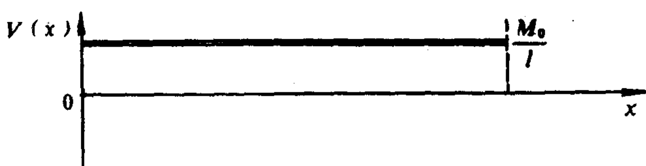


图 6-6

其中 $C=M'(\xi+0)-M'(\xi-0)$. 有趣的是 $M(x)$是间断函数，它的导数却是连续函数，这从数学上似乎难以理解，然而在力学上这却是事实，这正是 δ-函数从中所起的微妙作用. 在该例中，当 $x=\xi$ 时，$V(\xi)=\frac{M_0}{l}$. 因此，应使 $C\delta(x-\xi)=\frac{M_0}{l}$ $(x=\xi)$，而 C 的表达式中 M 的左、右导数值可以人为地补充定义，如令：

$$M'(\xi+0) = \frac{M_0/2l}{\delta(x-\xi)},\ M'(\xi-0) = \frac{-M_0/2l}{\delta(x-\xi)}$$

这样 $C\delta(x-\xi)=\frac{M_0}{l}$（当 $x=\xi$ 时），从而保证了 $V(x)$的连续性.

写到这里，读者容易发现，就其振动理论而言，还有非线性振动、随机振动、弹性振动以及电动力学中的振动理论等内容. 这些内容涉及的知识面极广，仅就本书开始要求读者具有高等数学的知识而言，已经就不够用了. 所以，上述内容均从略. 然而，就 δ-函数在上述理论中的应用，也无非就是如此，即用 δ-函数表示系统所受的力，或者是将非线性振动转化为线性振动，然后再运用将持续力变为瞬时力的迭加等方法. 因此，我们说本章所讲述的 δ-函数在振动理论中的应用具有典型性.

第七章　δ-函数在地球物理勘探中的应用

在地球物理勘探中，经常会遇到一些特殊的信号，无法用通常意义下的函数来描述. 不仅如此，在对这些信号的处理方法上，如滤波、频域时域转换等方面，也是步履维艰. 正是由于有了 δ-函数这个强有力的数学工具，根据它的定义和特有的性质，不仅能恰当地表示这些特殊的信号，而且，还能大量地简化其中繁琐的数学推导. 因此，δ-函数已被广泛地应用于地球物理勘探领域中，本章溅敌举一些实例，说明 δ-函数在地球物理勘探方法的理论分析、正反演方法的研究，以及信号数字处理诸方面的应用.

§7.1　应用 δ-函数描述地震源的脉冲波

在地球物理勘探中，传播于地下岩石介质中的地震波，是通过人工震源激发产生的. 震源的种类很多，诸如炸药爆炸、气枪、电火花、锤击等. 它们中的大多数在激励的瞬间产生巨大的冲击力，激发岩石介质振动而产生地震脉冲波，我们通常称这种源为理想脉冲源. 对于理想脉冲源及其产生传播的脉冲波的描述，从数学角度上，只能借助于 δ-函数. 即

$$\Phi(t)=\begin{cases}0 & 0>t>\Delta t\\ \delta(t) & 0\leqslant t\leqslant\Delta t\end{cases}\tag{7-1}$$

或

$$\Phi(n)=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ \delta(n) & n=0\end{cases}\tag{7-2}$$

(7-1)式中的 Δt 是表示一瞬间，即很短暂的时刻. 脉冲波如图 7-1 所示.

若激发源不是上述的理想脉冲时，例如是一任意震源 $S(t)$ 或 $\{S$

$(n)\}$，这时，我们虽然不能直接用 $\delta(t)$ 或 $\delta(n)$ 来表示，但它可以通过 $\delta(t)$ 或 $\delta(n)$ 来间接地表示，即

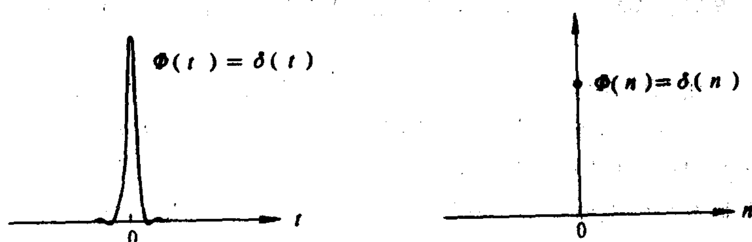


图 7-1

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{7-3}$$

或

$$S(n) = \sum_{k=0}^{\infty} S(k)\delta(n-k) \qquad (n \geqslant 0)$$

这实际上就是我们在第五章中介绍的，表示脉冲波的迭加.

在地球物理勘探中，我们经常分析信号的频谱，以了解信号的组成特点. 脉冲波的频谱特征在地球物理勘探中特别重要. 我们也常用

$$\delta(\omega) = F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = 1 \tag{7-4}$$

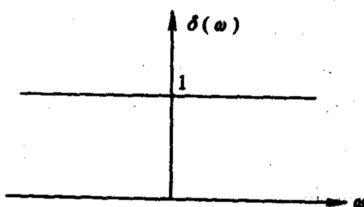


图 7-2 脉冲信号的频谱

来从频率域角度描述脉冲源信号和传播的脉冲波. 其中 ω 为频率(如图 7-2).

脉冲源函数及脉冲波的频谱是个均匀谱，是由无穷多频率成分的信号组成. 说明脉冲源发出的脉冲信号含有丰富的频率信号，尤其高频信息丰富，具有这种频谱特征的信号，在时间域内是个尖脉冲状(如图 7-1).

凡是在地球物理勘探中，出现的这类尖脉冲状信号，一般都是采用 δ-函数来表示.

§7.2 地震波波动理论的讨论

在地震波波动理论的讨论中，有时需要考虑波动特点和外力源（震源）的关系，有时在波动方程求解中要引入 Green 函数等，都要涉及 δ-函数的问题. 下面通过几个实例，说明 δ-函数的作用.

7.2.1 标量介质——时间简谐震源情况下二维波动理论讨论中 δ-函数的应用

外力源为时间简谐震源时，地震波波动方程应是非齐次标量形式，即

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}=-2\pi\delta(x)\delta(z)e^{-i\omega t} \qquad (7\text{-}5)$$

为了求得(7-5)式的解，我们令

$$\varphi(x,z,t)=\Phi(x,z)e^{-i\omega t}$$

并代入(7-5)式，得

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}+k^2\Phi=-2\pi\delta(x)\delta(z) \qquad (7\text{-}6)$$

其中，$k=\frac{\omega}{v}$，利用 δ-函数的傅氏变换，会使方程求解简便. 于是，将(7-6)式两边关于 x 作傅氏变换，即

$$\tilde{\Phi}(k_x,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x,z)e^{-ik_x x}dx$$

$$\Phi(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Phi}(k_x,z)e^{ik_x x}dk_x$$

得

$$-k_x^2\tilde{\Phi}+\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial z^2}+k^2\tilde{\Phi}=-2\pi\delta(z) \qquad (7\text{-}7)$$

再把(7-7)式关于 z 作双边拉氏变换，即

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(k_x,p)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Phi}(k_x,z)e^{-pz}dz$$

$$\tilde{\Phi}(k_x,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\tilde{\tilde{\Phi}}(k_x,p)e^{pz}dp$$

代入(7-7)式得到

$$[p^2-(k_x^2-k^2)]\tilde{\tilde{\Phi}}=-2\pi \tag{7-8}$$

同样方法，也可以把(7-5)式先对 z 作傅氏变换，然后再对 x 作拉氏变换，得

$$[p^2-(k_z^2-k^2)]\tilde{\tilde{\Phi}}=-2\pi \tag{7-9}$$

这里推导的目的，不是要去求方程的解(如果要求解，从(7-8)或(7-9)式解出 $\tilde{\tilde{\Phi}}$，再取其逆变换即得)，而主要是说明从(7-5)式过渡到(7-8)或(7-9)式的过程中，δ-函数所起的简化运算的作用.

7.2.2 标量介质——脉冲震源情况下 δ-函数的应用

外力源是一脉冲 δ-函数时，相应的地震波波动方程为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-2\pi\delta(x)\delta(z)\delta(t) \tag{7-10}$$

应用 δ-函数的性质，对(7-10)式求解. 首先将(7-10)式两端关于时间 t 作拉氏变换，得

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\frac{s^2}{v^2}\Phi=-2\pi\delta(x)\delta(z) \tag{7-11}$$

其中 $\Phi=\int_0^{+\infty}\varphi(x,y,t)e^{-st}dt$. 再将(7-11)式两边关于 x 作傅氏变换，即

$$\tilde{\Phi}(q,z,s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x,z,s)e^{-isq\frac{x}{v}}dx$$

代入(7-11)式得

$$-\left(\frac{sq}{v}\right)^2\tilde{\Phi}+\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial z^2}-\left(\frac{s}{v}\right)^2\tilde{\Phi}=-2\pi\delta(z) \tag{7-12}$$

最后，将(7-12)式关于 z 作双边拉氏变换，有

$$p^2-\left(\frac{s}{v}\right)^2(q^2+1)\tilde{\tilde{\Phi}}=-2\pi \tag{7-13}$$

式中 $\tilde{\tilde{\Phi}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Phi}(q,z,s)e^{-pz}dz$ ·

易见由(7-3)式解出 $\tilde{\tilde{\Phi}}$，再取其逆变换，立即得到其解. 对于(7-10)式如此简便地得到解，关键是应用了 δ-函数的积分性质.

7.2.3 弹性介质——线力情况下 δ-函数的应用

作用于无限介质中，线力源的弹性波运动方程为

$$\frac{\lambda+2u}{\rho}\nabla(\nabla\cdot u)-\frac{\mu}{\rho}\nabla\times\nabla\times u-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-e_z\frac{f(t)\delta(r)}{2\pi r\rho} \tag{7-14}$$

式中 $\delta(r)$ 是空间坐标中的 δ-函数，$|r|=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$，$e_z$ 是力 $f(t)$ 方向的单位矢量，∇ 为哈密顿算子.

对(7-14)式两边作傅氏变换，得

$$U(x,z,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,z,t)e^{-i\omega t}dt,F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

代入(7-14)式，得

$$V_p^2\nabla(\nabla\cdot U)-V_s^2\nabla\times\nabla\times U+\omega^2U=-e_z\frac{F(\omega)}{2\pi r\rho}\delta(r) \tag{7-15}$$

式中 $V_p^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$，$V_s^2=\frac{\mu}{\rho}$. 为了解(7-15)式，将 U 表示为

$$U=\nabla(\nabla\cdot A_p)-\nabla\times(\nabla\times A_s) \tag{7-16}$$

在二维情况下，有

$$-e_z\frac{F(\omega)}{2\pi r\rho}\delta(r)=-e_z\frac{F(\omega)}{2\pi\rho}\nabla^2(\ln r)$$

$$=\nabla\cdot\nabla\left[-e_z\frac{F(\omega)}{2\pi\rho}\ln r\right]-\nabla\times\nabla\times\left[-e_z\frac{F(\omega)}{2\pi\rho}\ln r\right] \tag{7-17}$$

如图 7-3 所示. 其中，力 f 是位于平板的平面沿着 z 轴方向. 每单位厚度平板通过计算下列式子，可见(7-17)式是成立的.

$$\frac{1}{2\pi}\int \nabla^2(\ln r)ds = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial}{\partial r}(\ln r)dl = 1 = \int \frac{\delta(r)}{2\pi r}ds$$

把(7-17)和(7-16)两式代入(7-15)式，得到

$$V_p^2\nabla\{\nabla\cdot[\nabla(\nabla\cdot A_p)+k_p^2A_p+e_zF(\omega)(\ln r)/2\pi\rho v_p^2]\}$$

$$+v_s^2\nabla\times\nabla\times[\nabla\times\nabla\times A_s-k_s^2A_s-e_zF(\omega)\ln r/2\pi\rho v_s^2]=0$$

把$-\nabla\times\nabla\times A_p$、$-\nabla(\nabla\cdot A_s)$分别加入第一个和第二个括号内，并不改变上述整个表达式，于是，得

$$v_p^2\nabla\{\nabla\cdot[\nabla(\nabla\cdot A_p)-\nabla\times\nabla\times A_p+k_p^2A_p+e_zF(\omega)\ln r/2\pi\rho v_p^2]\}$$

$$+v_s^2\nabla\times\nabla\times[\nabla\times\nabla\times A_s-\nabla(\nabla\cdot A)_s-k_s^2A_s-e_zF(\omega)\ln r/2\pi\rho v_s^2]=0$$

如果下面二式

$$\nabla^2A_p+k_p^2A_p=-e_z\frac{F(\omega)\ln r}{2\pi\rho v_p^2} \tag{7-18}$$

$$\nabla^2A_s+k_s^2A_s=-e_z\frac{F(\omega)\ln r}{2\pi\rho v_s^2} \tag{7-19}$$

有解，我们可写成

$$A_p=e_zA_p \text{ 和 } A_s=e_zA_s$$

则方程

$$\frac{\partial^2A_p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A_p}{\partial z^2}+k_p^2A_p=-\frac{F(\omega)\ln r}{2\pi\rho v_p^2} \tag{7-20}$$

和

$$\frac{\partial^2A_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A_s}{\partial z^2}+k_s^2A_s=-\frac{F(\omega)\ln r}{2\pi\rho v_s^2} \tag{7-21}$$

仍然有解，这时(7-15)式已简化为两个相同的标量方程(7-20)和(7-21)式. 这两个方程的求解，仍然困难，因为 $\ln r$ 的奇异性，妨碍了积分变换解法的实施. 当

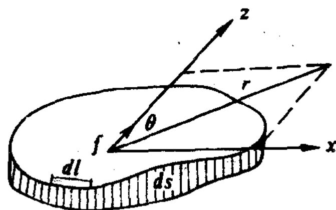


图 7-3　脉冲信号的频谱

引入了 δ-函数后，解该二方程便简单易行了，因为

$$\nabla^2(\ln r)=\frac{\delta(r)}{r}=2\pi\delta(x)\delta(z)$$

并将其对 x 作傅氏变换，对 z 作双边拉氏变换则有

$$(p^2-k^2)\overline{\overline{\ln r}}=2\pi$$

或者

$$\overline{\overline{\ln r}}=\frac{2\pi}{p^2-k^2}$$

现在对(7-20)式的左端对 x 作傅氏变换，对 z 作双边拉氏变换，得到 $(k_y^2+p^2-k^2)A_y$，合并起来有

$$\bar{\bar{A}}_y=-\frac{F(\omega)}{\rho V_y^2}\frac{1}{p^2-k^2}\frac{1}{k_y^2+p^2-k^2}$$

进一步解下去，便可得到方程的解. 显然，在这个例子中，当我们在求解过程中遇到困难时，利用了 δ-函数和它的性质，便巧妙地避开了障碍，使方程的最终求解得以进行下去.

7.2.4 基尔霍夫方程的积分解

建立波动方程积分形式的解，要求计算如图 7-4 中 Ω 域内任意一点 M 处的波场 $\varphi(x,y,z,t)$. 按惠更斯-夫列涅尔原理，M 点的波场是由分布域 Ω 内和域 Ω 外的波源引起的. 其中 S 点是位于域内的波源，波源分布是任意的. 求解是把各个点 S 波源在 M 点引起的响应叠加起来，以得到域 Ω 内全部波源的总效果. 域 Ω 外的波源，可以用 Q 面上的积分表示其效应，我们用 (x_1,y_1,z_1) 和 (x,y,z) 分别表示波源点和场点坐标，用 r 和 r_1 表示该两点的矢径，用 $R=|r-r_1|$ 代表从 S 点到 M 点的距

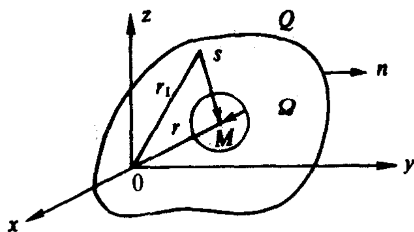


图 7-4

离，$R=|r-r_1|=[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{\frac{1}{2}}$. 利用第四章中介绍的第二格林公式(4-55)，即

$$\iiint_\Omega(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)d\Omega=\oint_Q\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dQ \qquad (7\text{-}22)$$

求解. 式中 ψ 和 φ 是空间域 Ω 内具有二阶连续偏导数的两个任意函数，$\frac{\partial}{\partial n}$表示沿外法线 n 的方向导数，Q 是域 Ω 的边界曲面，由于在 M 点时$\frac{1}{R}\to\infty$，有奇点，不满足格林公式的条件，所以，要围绕 M 点画一个很小的球面 Q_0，把它作为 Ω 域的内边界面，Q 和 Q_0 所围的体积为 Ω'.

设 $\varphi=\frac{1}{R}\delta(t+\frac{R}{v})$，$\psi$ 是满足波动方程的解，F 为力位，即

$$v^2\nabla^2\psi-\ddot\psi=-F \qquad (7\text{-}23)$$

将(7-23)式和 $\varphi=\frac{1}{R}\delta(t+\frac{R}{v})$代入(7-22)式左端，并设 $A(t)$为其积分结果，则有

$$A(t)=\int_{\Omega'}(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\ddot\psi)d\Omega'\,^*$$

$$=\int_{\Omega'}\left[\psi\frac{1}{v^2}\ddot\varphi-\varphi\left(\frac{1}{v_2}\ddot\psi-\frac{F}{v^2}\right)\right]d\Omega'$$

$$=\frac{1}{v^2}\int_{\Omega'}(\psi\ddot\varphi-\varphi\ddot\psi)d\Omega'+\int_{\Omega'}\frac{F\delta(t+\frac{R}{v})}{v^2R}d\Omega'$$

$$=\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega'}(\psi\dot\varphi-\varphi\dot\psi)d\Omega'+\int_{\Omega'}\frac{F\delta(t+\frac{R}{v})}{v^2R}d\Omega'$$

再对 t 积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}A(t)dt=\int_{\Omega'}\frac{1}{v^2R}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,y_1,z_1,t)\delta(t+\frac{R}{v})dt\right\}d\Omega'$$

---

* 在科技书中，常把重积分记号"$\iiint_\Omega$"简记为"$\int_\Omega$"，只要注意积分区域和函数的维数便知是什么积分了. 另外也常把一阶导数、二阶导数简记为"$\dot\varphi$"，"$\ddot\varphi$". 以下同.

$$+\frac{1}{v^2}\left\{\iint_{\Omega'}(\psi\dot{\varphi}-\varphi\dot{\psi})d\Omega'\right\}_{t=-\infty}^{t=+\infty} \tag{7-24}$$

因为$\delta(t+\frac{R}{v})\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$，$\delta'(t+\frac{R}{v})\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$，所以，上式最后一项等于零，结果为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}A(t)dt=\int_{\Omega'}\frac{1}{v^2R}f(x_1,y_1,z_1,-\frac{R}{v})d\Omega'$$

现在我们来计算格林公式的右端，这个积分应该在曲面 Q 上和小球面 Q_0 上分别进行. 设 $B(t)$表示在 Q_0 表面上的积分结果，用如上面所选 ψ 和 φ 代入式中，有

$$\begin{aligned}B(t)&=\oint_{Q_0}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dQ\\&=\oint_{Q_0}\left\{\psi\mathrm{grad}'\frac{\delta(t+R/v)}{R}-\frac{\delta(t+R/v)}{R}\mathrm{grad}'\psi\right\}\mathbf{n}dQ\\&=\oint_{Q_0}\left\{\psi\delta(t+\frac{R}{v})\mathrm{grad}'(\frac{1}{R})+\frac{\psi}{R}\mathrm{grad}'\delta(t+\frac{R}{v})\right.\\&\qquad\left.-\frac{\delta(t+R/v)}{R}\mathrm{grad}'\psi\right\}\cdot\mathbf{n}dQ\\&=\oint_{Q_0}\left\{\psi\frac{\delta(t+R/v)}{R^3}\mathbf{R}-\frac{\psi}{R^2v}\delta'(t+\frac{R}{v})\mathbf{R}-\frac{\delta(t+R/v)}{R}\mathrm{grad}'\psi\right\}\cdot\mathbf{n}dQ\end{aligned} \tag{7-25}$$

由于在 Q_0 上求积分时，$R=R_0=$常数，从而可把含 R 的因子提到积分号前面来. 将 $B(t)$对 t 积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}B(t)dt=\oint_{Q_0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\frac{\delta(t+R/v)}{R^3}\mathbf{R}-\frac{\psi}{vR^2}\delta'(t+\frac{R}{v})\mathbf{R}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{R}\delta(t+\frac{R}{v})\mathrm{grad}'\psi]dt\right\}\cdot\mathbf{n}dQ \tag{7-26}$$

由于 δ-函数的性质 1.2，上式对 t 积分后，式中就不再出现 δ-函数，而其他函数中的 t 则全部换成$-R/v$. (7-26)式的后两项对 t 积分后得

$$-\oint_{Q_0}\left\{\frac{1}{vR^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\delta'(t+\frac{R}{v})\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}dt+\frac{1}{R}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+\frac{R}{v})\mathrm{grad}'\psi\cdot\mathbf{n}dt\right\}dQ$$

$$= -\oint_{Q_0}\left\{-\frac{1}{vR^2}(\dot{\psi})\Big|_{t=-\frac{R}{v}}\frac{\vec{R}}{R}+\frac{1}{R}\mathrm{grad}'\psi)\Big|_{t=-\frac{R}{v}}\right\}dQ$$

$$= 4\pi R_0\left\{\frac{1}{v}(\bar{\dot{\psi}})\Big|_{t=-\frac{R}{v}}+\left(\frac{\overline{\partial\psi}}{\partial R}\right)\Big|_{t=-\frac{R}{v}}\right\} \tag{7-27}$$

我们假设函数 ψ 及其偏导数，在所考虑的空间域中是连续的和有限的，从而各导数的平均值$\bar{\dot{\psi}}$(即中值)也是有限的，因此，当 $R_0\to 0$ 时，上式结果趋于零，故有

$$\lim_{R_0\to 0}\int B(t)dt = \lim_{R_0\to 0}\left\{4\pi\psi(x,y,z,t=-\frac{R_0}{v})\right\} = 4\pi\psi(x,y,z) \tag{7-28}$$

同理可求得格林公式右端与 Q 面有关的项，对时间 t 的积分，最后得到初始时刻 $t=0$ 时的波场积分形式的表达式为

$$\psi(x,y,z,t)\big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{F(x_1,y_1,z_1,t)\big|_{t=-\frac{R}{v}}}{R}d\Omega'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_{Q}\left\{[\psi]\Big|_{t=-\frac{R}{v}}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{vR}\frac{\partial R}{\partial n}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]\Big|_{t=-\frac{R}{v}}-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\Big|_{t=-\frac{R}{v}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\right]\Big|_{t=-\frac{R}{v}}\right\}dQ \tag{7-29}$$

§7.3 δ-函数在地球物理正演模拟问题中的应用

在地球物理正演模拟问题中，应用 δ-函数的实例很多，这里仅举一个例子——二维声波模拟问题中 δ-函数的应用.

假设平面波在均匀介质内(区域 $z<Z$)，以速度 v 沿着垂直方向传播，在 $t=0$ 时刻到达水平界面 $z=Z$，设想界面 $z=Z+\Delta Z$ 是两个均匀半空间的界面，沿界面的反射系数为 ξ，震源函数为

$$s(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t<0 \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } t>0 \text{ 时}\end{cases}$$

波场 $u(x,z,t)$从水平界面 $z=Z$ 散射进入 $z<Z$ 区域，源波表示为

$$\varphi = s[t + (Z - z)/v] \tag{7-30}$$

在区域 $z \leq Z$ 的二次场由反射波定义为

$$u' = \xi s[t - (Z + 2\Delta Z - z)/v] \tag{7-31}$$

该区域的二次场法向微分为

$$\frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\xi}{v}\delta[t - (Z + 2\Delta Z - z)/v] \tag{7-32}$$

其中 $\delta(t) = \frac{ds(t)}{dt}$. 假如令 $\Delta\tau = 2\Delta Z/v$，则 $z = Z$ 的二次场可表示为

$$\frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\xi}{v}\delta(t - \Delta\tau) \tag{7-33}$$

式中的$\frac{\partial u'}{\partial z}$是 u' 沿垂向方向的法向导数．又令

$$g = s(t - t_r)/(t^2 - t_r^2)^{\frac{1}{2}} \tag{7-34}$$

定义为格林函数，$t_r = r/v$，$r = [(x - x_1)^2 + (z - z_1)^2]^{1/2}$，$\frac{\partial u'}{\partial z}$与格林函数 g 褶积结果为

$$\frac{\partial u'}{\partial z} * g = \int_{\infty}^{+\infty} \frac{\partial u'}{\partial z}(t - \tau)\, \frac{s(\tau - t_r)}{\sqrt{\tau^2 - t_r^2}} d\tau$$

$$= \frac{\xi}{v}\, \frac{s(t - \Delta\tau - t_r)}{\sqrt{(t - \Delta\tau)^2 - t_r^2}}$$

将此式代入

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial u'}{\partial z} * g\right) dx$$

得

$$u = \frac{\xi}{\pi v}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(t - \Delta\tau - t_r)}{\sqrt{(t - \Delta\tau)^2 - t_r^2}} dx \tag{7-35}$$

§7.4 地球物理反演问题中 δ-函数的应用

在地球物理反演问题中，不仅能应用 δ-函数表示震源脉冲波，同时，对简化方程的解法上也起到了特殊的作用．

7.4.1 一维声波方程的波恩(Born)反演

层状介质面震源零时刻激发情况下，下半空间的波场方程是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\dfrac{1}{V^2(z)}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-s(t)\delta(z)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u|_{t=0}=0\\ u|_{z=0}=0,\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\ u|_{z=0}=\varphi(t)\end{cases}\tag{7-36}$$

若速度函数 $V(z)$ 已知，则方程的解是确定的，如果 $V(z)$ 是未知，那么解是不确定的. 求解 $V(z)$ 便是地球物理反演问题，或者说是反问题. 在对(7-36)式求解 $V(z)$ 过程中，为方便起见设 $s(t)=\dfrac{2}{C_0}\delta'(t)$，$C_0$ 是常数，称为参考速度或背景速度. 于是(7-36)式的泛定方程可表示成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{V^2(z)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{2}{C_0}\delta(z)\delta'(t)\tag{7-37}$$

令 $\dfrac{1}{V_2(z)}=\dfrac{1+a(z)}{C_0^2}$，$\left|\dfrac{a(z)}{C_0}\right|<<1$，即 $a(z)$ 为 C_0 的微小扰动，这样产生的散射波能量很小，称之为弱散射. 再设 $u=u_1+u_2$，其中 u_1 为入射波，u_2 为散射波，它们分别满足如下二方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}-\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}&=-\frac{2}{C_0}\delta(z)\delta'(t)\\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}-\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}&=\frac{\delta(z)}{C_0^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\tag{7-38}$$

由 δ-函数的性质，将(7-38)两式对时间 t 作傅氏变换后，并利用初始条件，得

$$\frac{d^2\tilde{u}_1}{dz^2}+k^2\tilde{u}_1=i2k\delta(z)\tag{7-39}$$

$$\frac{d^2\tilde{u}_2}{dz^2}+k^2\tilde{u}_2=-a(z)k^2\tilde{u}_1\tag{7-40}$$

式中 $k=\omega/C_0$. 用常数变易法容易求得(7-39)式的解为

$$\tilde{u}_1=e^{ikz}$$

用格林(Green)函数法可求出(7-40)式的解为

$$\tilde{u}_2(z,\ \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2ik} e^{ik(\xi - z)} [-\ a(\xi)k^2\tilde{u}_2(\xi,\omega)]d\xi \qquad (7\text{-}41)$$

再利用 Born 近似，进一步计算可求得 $a(z)$，最后便得到速度 $V(z)$，即是 Born 反演的最终结果.

7.4.2 三维声波方程的波恩(Born)反演

在三维情况下，定解问题为

$$\begin{cases} \Delta u - \dfrac{1}{v^2(x)} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\ \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3, t) \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u\big|_{x_3=0} = \varphi(x_1, x_2, t, \xi_1, \xi_2) \end{cases} \qquad (7\text{-}42)$$

其中，$x=(x_1,x_2,x_3)$，z 轴向下，(ξ_1,ξ_2)是震源坐标，记 $n(x)=\dfrac{1}{v(x)}$，$n_1(x)=n(x)-n_0$，$N_1=\sup|n_1|$. n_0 是常数称为参考值，$\left|\dfrac{n_1}{n_0}\right| << 1$，作小参数摄动

$$n_\varepsilon = n_0(1 + \frac{\varepsilon}{N_1}n_1) \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \frac{N_1}{n_0} \qquad (7\text{-}43)$$

其中 ε 是摄动参数. 考虑带参数全空间的初值问题，则有

$$\begin{aligned} &\Delta u - n_\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\ \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \xi_3, t) \\ &u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \end{aligned} \qquad (7\text{-}44)$$

定解问题(7-44)式有级数形式的解，不妨设为：

$$u_\varepsilon(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,t)\varepsilon^i \qquad (7\text{-}45)$$

将(7-43)式和(7-45)式代入(7-44)式，得

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \Delta u_i\varepsilon^i - n_0^2(1 + \frac{\varepsilon}{N_1}n_1)^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\varepsilon^i = -\ \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3, t) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,0)\varepsilon^i = 0,\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial u_i(x,0)}{\partial t}\varepsilon^i = 0 \end{cases} \qquad (7\text{-}46)$$

比较(7-46)式两边 ε 的零次和一次幂的系数，得

$$\Delta u_0 - n_0^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = -\delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3, t)$$

$$\Delta u_1 - n_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 2\frac{n_0^2}{N_1} n_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$$

令 $n_0 = 1/C$，对上述二方程作关于 t 的傅氏变换，得

$$\Delta \tilde{u}_0 + \frac{\omega^2}{C^2}\tilde{u}_0 = -\delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3) \tag{7-47}$$

$$\Delta \tilde{u}_1 + \frac{\omega^2}{C^2}\tilde{u}_1 = -\frac{2n_0^2}{N_1} n_1 \omega^2 \tilde{u}_0 \tag{7-48}$$

于是，(7-47)式的解为

$$\tilde{u}_0 = \frac{1}{4\pi\rho} e^{i\frac{\omega}{c}\rho} \tag{7-49}$$

其中，$\rho = [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2]^{\frac{1}{2}}$. 我们注意到(7-48)式的 Green 函数为 $-u_0(x, \xi_1, \xi_2, \omega)$，由 Green 函数法得

$$\tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2, 0, \omega) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{2n_1}{N_1} \frac{\omega^2}{C^2} \frac{1}{(4\pi\rho)^2} e^{2i\frac{\omega}{c}\rho} dx_1 dx_2 dx_3 \tag{7-50}$$

令 $\tilde{u}_s = \frac{N_1}{n_0}\tilde{u}_1$ 和 $a(x) = \frac{2n_1}{n_0}$. (7-50)式可写成

$$\frac{\tilde{u}_s(\xi_1, \xi_2, \omega)}{\omega^2} = \frac{1}{C^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(x)}{(4\pi\rho)^2} e^{i2\omega\rho/c} dx_1 dx_2 dx_3 \tag{7-51}$$

从(7-51)式中，便可解得 $a(x)$，为此需证明下列等式成立

$$\frac{e^{i2\omega\rho/c}}{\rho} = \frac{i}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_z} e^{ik_z z} e^{-i(k_x(x_1 - \xi_1) + k_y(x_2 - \xi_2))} dk_x dk_y \tag{7-52}$$

令 $x'_1 = x_1 - \xi_1$，$x'_2 = x_2 - \xi_2$，则

$$u^* = \frac{1}{\sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + x_3^2}} e^{i2\omega(x'^2_1 + x'^2_2 + x_3^2)^{1/2}/c}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_z z}}{k_z} e^{-i(k_x x'_1 + k_y x'_2)} dk_x dk_y$$

不难验证 u^* 满足方程

$$\Delta u^* + \frac{\omega^2}{(c/2)^2} u^* = -4\pi\delta(x) \tag{7-53}$$

对(7-53)式关于 x'_1，x'_2 作傅氏变换，并令 $x_3 = z$，得

$$\frac{d^2\tilde{u}^*}{dz^2} + k_z^2\tilde{u}^* = -4\pi\delta(z)$$

该常微分方程的通解为

$$\tilde{u}^* = d_1(z)e^{-ik_z z} + d_2(z)e^{ik_z z} \qquad (7\text{-}54)$$

用常数变易法知 $d_1(z)$和 $d_2(z)$满足方程

$$d'_1(z)e^{-ik_z z} + d'_2(z)e^{ik_z z} = 0$$

$$-ik_z d'_1(z)e^{-ik_z z} + ik_z d'_2(z)e^{ik_z z} = -4\pi\delta(z)$$

由此，得

$$d_2(z) = \begin{cases} \dfrac{-2\pi}{ik_z}\displaystyle\int_{-\infty}^{z} e^{-ik_z z'}\delta(z')dz' = \dfrac{i2\pi}{k_z} & \text{当 } z \geq 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } z < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

又由物理意义知 $d_1(z)\equiv 0$，于是，当 $z>0$ 时，由

$$\tilde{u}^* = \frac{i2\pi}{k_z}e^{ik_z z}$$

的傅氏逆变换，便可得到所需证明的(7-52)式，将(7-51)式两边对 ω 微分便可得到 $a(k_x,k_y,k_z)$表达式，其傅氏逆变换的结果，即为反演结果.

上述数学推导较繁，然而，为获得我们所要的结果，若不是在几个关键步骤采用了 δ-函数特有的性质，能如此顺利地求解，是难以想象的.

7.4.3 基尔霍夫积分偏移与频率-波数域偏移法(F-K)等价性的证明

根据 δ-函数的性质 1.2(即筛选性质)

$$u(x,y,z,t-\frac{r}{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y,z,t,t_0)\delta(t-\frac{r}{v}-t_0)dt_0 \quad (7\text{-}55)$$

将

$$u(x_p,y_p,z_p,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iint_Q \frac{1}{r}u(x,y,0,t-\frac{r}{v})dQ$$

改写成

$$u(x_p,y_p,z_p,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iiint_{-\infty}^{+\infty}u(x,y,z,t_0)\frac{\delta(t-\frac{r}{v}-t_0)}{r}dt_0dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iiint_{-\infty}^{+\infty}u(x,y,z,t_0)$$

$$\cdot\frac{\delta(t-t_0-\frac{1}{v}\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2})}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}dt_0dxdy \tag{7-56}$$

(7-56)式右端的三重积分，实际上是个三维褶积式，因此，可写成

$$u(x_p,y_p,z_p,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left[u(x_p,y_p,z,t)*\frac{\delta(t-r'/v)}{r'}\right] \tag{7-57}$$

式中 $r'=[x_p^2+y_p^2+(z-z_p)^2]^{\frac{1}{2}}$，和第三章使用的符号一样“ * ”是褶积运算符号，再利用褶积微商的性质，即

$$\frac{d(u*w)}{dz}=w*\frac{du}{dz}=u*\frac{dw}{dz}$$

(7-57)式变为

$$u(x_p,y_p,z_p,t)=\frac{1}{2\pi}u(x_p,y_p,z,t)*\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\delta(t-\frac{r'}{v})}{r'}\right]$$

$$=u(x_p,y_p,z,t)*h(x_p,y_p,z_p-z,t) \tag{7-58}$$

式中 $h(x_p,y_p,z_p-z,t)$ 相对变量 x_p,y_p,t 作三维傅氏变换，得

$$H(k_x,k_y,z_p-z,\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(t-\frac{r'}{v})}{r'}e^{-i(\omega t+k_xx_p+k_yy_p)}dx_pdy_pdt$$

$$=e^{-i\Delta zk_z} \tag{7-59}$$

式中，$\Delta z=z_p-z$，$k_z=\left(\frac{\omega^2}{v^2}-k_x^2-k_y^2\right)^{1/2}$，令 $u(x_p,y_p,z_p,t)$ 和 $u(x_p,y_p,z,t)$ 的三维傅氏变换分别为 $\tilde{u}(k_{xp},k_{yp},z_p,\omega)$ 和 $\tilde{u}(k_{xp},k_{yp},z,\omega)$，则对(7-58)式两边作三维傅氏变换，再考虑 $z_p=z+\Delta z$，得

$$\tilde{u}(x_p,y_p,z+\Delta z,\omega)=\tilde{u}(x_p,y_p,z_p,\omega)e^{-ik_z\Delta z}$$

此式与 *K-F* 波动方程偏移中使用的延拓公式是完全一致的，因此，基尔霍夫积分法偏移与 *F-K* 法偏移具有一定的等价性. 此外，

由(7-57)式可以看出，偏移问题还可以化为褶积运算来完成.

7.4.4 拉冬(Rodon)变换

奥地利数学家 Radon 于 1917 年，发表了"关于由函数沿某些流形的积分确定该函数"的著名论文，建立了如今人们称之为图象重建方程的 Radon 变换. 图象重建是 CT 技术中的核心问题. CT 是英文 Computed Tomograph 字头组成的缩写词，直译为"计算机层析成象". 即立体图形的逐层成象，这种技术近几年在地球物理学领域中发展起来了. Radon 变换是 CT 技术中重要的数学理论根据. 其中 δ-函数的应用也使该理论锦上添花.

所谓投影函数——Radon 变换，就是在有界成象域 Ω 中，设物理量的二维分布为 $f(x,y)$，它是一个待求的函数. 一条射线 l 穿过成象区，在另一端被探测器接收，所测得的数据应等于 $f(x,y)$ 沿 l 直线的积分，我们称之为投影. 射线 l 是由两个参数 ξ 和 θ 确定的，(ξ,η) 是沿射线的坐标系，ξ 是 l 距坐标原点的距离，θ 是射线 s 与 x 轴的交角，或者说 θ 是 (ξ,η) 坐标系相对 (x,y) 坐标系的转角. $f(x,y)$ 沿 l 的积分叫做 $f(x,y)$ 的二维 Rodon 变换，也称为投影函数，显然它是 ξ 与 θ 的函数. 我们把这样的投影函数记为：

$$[Rf](\xi,\theta) = \iint_l f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)\delta(\xi - s\cdot r)dr \quad (7\text{-}60)$$

其中 r 为 (x,y) 平面上的矢量. δ-函数 $\delta(\xi - s\cdot r)dr$ 表示对 $\xi = s\cdot r$ 的直线作曲线积分.

§7.5 δ-函数在地球物理勘探数据处理中的应用

本书的第五章，对数字处理的一般理论作了介绍，这一节再汇集几个在地球物理勘探中的应用实例.

7.5.1 系统特性的描述

当系统的输入信号为单位脉冲 δ-函数时，系统的行为特别重要. 在地球物理勘探中，常常给系统输入单位脉冲信号来测量系统

的特性，我们把输入 $\delta(t)$ 信号所获得的输出称作系统的脉冲响应. 这是时间域中系统特性的表示. 此外，我们常常在频率域里研究系统的特性，从频率域的角度来看，系统输入的信号是单位脉冲，即 $\delta(t)$，按 $\delta(t)$ 的傅氏变换 $F[\delta(t)]=\delta(\omega)=1$，则系统输出的信号为频率函数，即是输出信号的频谱，就等于系统的频率响应，记作

$$H(\omega)=\frac{y(\omega)}{\delta(\omega)} \tag{7-61}$$

显然，这样定义的频率响应 $H(\omega)$，是从频率域角度表示系统的响应. $H(\omega)$ 的傅氏逆变换为

$$F^{-1}[H(\omega)]=h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}H(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{7-62}$$

$H(\omega)$ 和 $h(t)$ 都可以用来表示系统的特性，并且，是唯一地表征系统的传输特性. 在地球物理勘探中，系统可以指物理电路装置(如检波器、滤波器、放大器等)，也可以指的是数学变换的算子，还可以把地层视为传输系统，在数学上 $H(\omega)$ 和 $h(t)$ 二者是等效的，但从实验的观点看，对 $H(\omega)$ 的测量代表稳态测量. 例如测量地震检波器的频率特性时，是用振动台输入稳定的不同频率的正弦信号，测量其对应的输出；而对 $h(t)$ 的测量，则是瞬态测量. 例如：用锤子敲击给检波器输入单位冲击信号(即锤击产生的瞬时脉冲，以 δ-函数表示)，在示波器上观察其固有振动，从而测量检波器的特性.

7.5.2 数字滤波褶积公式的证明

设有一线性系统，而且它具有时不变性质，该系统对单位脉冲 $\delta(t-\tau)$ 的响应为 $h(t,\tau)$ 则

$$T[\delta(t-\tau)]=h(t,\tau) \tag{7-63}$$

可以证明，如果 $h(t,\tau)$ 已知，则这个系统即被完全表征，亦即，这个系统对任意输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$，可借助于 $h(t,\tau)$ 获得.

根据 δ-函数的积分性质，将 $x(t)$ 表示成脉冲 $x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 之迭加，即

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

又由线性系统的性质，我们得到

$$T[x(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)T[\delta(t-\tau)]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

即

$$y(t)=T[x(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t,\tau)d\tau \qquad (7\text{-}64)$$

由于这个系统是时不变的，即系统对单位脉冲 $\delta(t)$的响应为$h(t)$，亦即

$$T[\delta(t)]=h(t) \qquad (7\text{-}65)$$

所以，当输入延时 τ 时，其输出也延时 τ，而特性不变，即：

$$T[\delta(t-\tau)]=h(t-\tau) \qquad (7\text{-}66)$$

根据(7-63)式，显然有

$$h(t,\tau)=h(t-\tau)$$

将其代入(7-64)式，得到对一个线性时不变系统任意的输入 $x(t)$，其输出 $y(t)$可单独地由 $h(t)$获得，即

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$$

7.5.3 δ-函数在脉冲反褶积中的应用

用瞬变冲击力震源激发产生的地震波，是脉冲波，这种波向地下岩石介质中传播，经地层系统作用后，我们观测到的结果，已不再是一个尖脉冲波了，波的周期变大. 我们把观测的这个结果用数学形式表示为

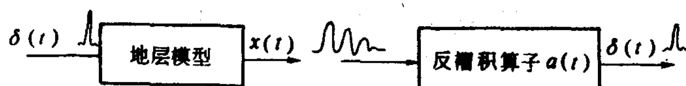


图 7-5

$$x(t)=w(t)*R(t)$$

或者是离散形式

$$x(n) = w(n) * R(n)$$

即简单地看作地震子波 $w(t)$ 与地层界面反射系数 $R(t)$ 褶积的结果. 由于这种信号的分辨率受到限制，不易区分相邻界面上相应的波，所以，在信号的计算机处理时，就是使 $x(t)$ 信号恢复到未受地层作用前的尖脉冲状. 即引入一个算子 $a(t)$，使

$$x(t) * a(t) = \delta(t) \tag{7-67}$$

信号 $x(t)$ 经算子 $a(t)$ 作用后的结果是 δ-函数. 这一过程就是地球物理勘探中的反褶积，或称反滤波，如图 7-5 所示. 不同的反褶积方法，反褶积算子 $a(t)$ 的求取方法不同. 脉冲反褶积法中 $a(t)$ 是采用如下最小平方法获得的.

设实际输出为 $y(t)$，期望输出为尖脉冲——δ-函数，二者在最小平方意义下，即

$$Q = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (y_n - \delta_n)^2 \tag{7-67}$$

使 Q 值最小. 为此，计算如下偏导数，并令其等于 0，即

$$\frac{\partial Q}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (y_n - \delta_n)\right]^2 = 0 \tag{7-68}$$

式中 $y_n = a_n * x_n = \sum\limits_{\tau=-\infty}^{+\infty} a_\tau x_{n-\tau}$，于是(7-68)式变为

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} a_\tau x_{n-\tau} - \delta_n\right)^2\right] = 0 \tag{7-69}$$

将上式微分算出来并整理，得

$$\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} a_\tau\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{n-\tau} x_{n-k}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n x_{n-k} \tag{7-70}$$

由(7-70)式解得反褶积算子 a_n，再用 x_n 与 a_n 褶积，便可得到尖脉冲，即

$$a_n * x_n = \delta(n) \tag{7-71}$$

7.5.4 提高信号信噪比的处理方法

提高信号的信噪比是地球物理勘探中最重要，也是经常要采用

的处理方法.该法通常是使用滤波来消除噪声，对不同的噪声，利用不同的滤波器，而 δ-函数的引入，对于描述滤波器的特性，有着重要的作用.

1. 无畸变滤波器特性的描述

这种滤波器的输出信号，只是输入信号的延迟和线性变化，并不发生奇变，它的振幅特性是个常数，相位特性是线性的.即

$$|H(\omega)| = k \quad (k\text{ 为常数})$$

$$\varphi(\omega) = \omega t_0 \tag{7-72}$$

亦即 $H(\omega)=ke^{-i\omega t_0}$.如图 7-6(*a*)所示.根据 δ-函数的傅氏变换，其时间特性为

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-i\omega t_0}e^{i\omega t}d\omega \\ &= k\delta(t - t_0) \end{aligned} \tag{7-73}$$

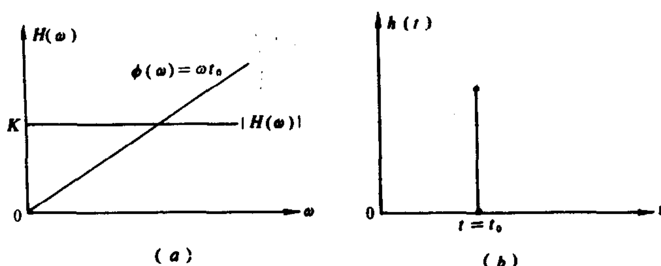


图 7-6 无畸变滤波器的频率特性和脉冲响应

如图 7-6(*b*)所示.再利用 δ-函数的性质，经此滤波器的输出结果为

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)k\delta(t-t_0-\tau)d\tau \\ &= kx(t-t_0) \end{aligned} \tag{7-74}$$

2. 理想全通滤波器特性的描述

理想全通滤波器的振幅频率特性是常数，而相位频率特性在某一截频之内是线性的，在此截频之外是常数，即

$$|H(\omega)| = k \quad (k\text{为常数})$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \omega t_0 & |\omega| < \omega_c \\ \omega_c t_0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

为简便起见，假设 $t_0 = n\pi/\omega_c$，其频率特性 $H(\omega)$ 可表示为

$$H(\omega) = kg_{\omega_c}(\omega)e^{-i\omega t_0} + k[1 - g_{\omega_c}(\omega)]e^{-in\pi} \tag{7-75}$$

它可分解为两个滤波器来表示，其中第一个滤波器为具有线性相位的理想低通滤波器，记为

$$H_1(\omega) = kg_{\omega_c}(\omega)e^{-i\omega t_0}$$

第二个滤波器是具有零延迟的理想高通滤波器，记为

$$H_2(\omega) = (-1)^n k[1 - g_{\omega_c}(\omega)]$$

由 δ-函数的性质，这两个滤波器频率特性的傅氏逆变换分别为：

$$h_1(t) = \frac{k}{\pi(t - t_0)}\sin\omega_c(t - t_0)$$

$$h_2(t) = (-1)^n k\delta(t) + (-1)^n \frac{k}{\pi t}\sin\omega t \tag{7-76}$$

所以，全通滤波器的时间特性可以写成

$$\begin{aligned} h(t) &= h_1(t) + h_2(t) \\ &= \frac{K}{\pi(t - t_0)}\sin\omega(t - t_0) \\ &\quad + (-1)^n k\delta(t) + (-1)^n \frac{k\sin\omega t}{\pi t} \end{aligned} \tag{7-77}$$

3. 90°相移滤波器特性的描述

90°相移滤波器特性的获得需借助于希尔伯特变换，即实连续信号作为仅含正频率成分的复信号的实部(参看本书第五章 § 5.4 中的 5.4.1 实连续信号的复信号表示)，设 $x(t)$ 为实连续信号，其频谱为 $X(f)$，f 为频率，$X(f)$ 满足 $\overline{X}(f) = X(-f)$，$x(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df \\ &= \int_{0}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df + \int_{-\infty}^{0} X(f)e^{i2\pi ft}df \end{aligned}$$

因为 $X(-f) = \overline{X(f)}$，所以

$$\int_0^{+\infty} X(-f)e^{-i2\pi ft}df = \int_0^{+\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

因此，$x(t)$又可表示为

$$x(t) = Re\left[\int_0^{+\infty} 2X(f)e^{i2\pi ft}df\right] \tag{7-78}$$

令

$$p(t) = \int_0^{+\infty} 2X(f)e^{i2\pi ft}df \tag{7-79}$$

$p(t)$称为$x(t)$的复信号.

设$p(t)$的频谱为$p(f)$，则由(7-79)式知

$$p(f) = \begin{cases} 2X(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \tag{7-80}$$

由(7-80)式看到复信号$p(t)$的频谱$p(f)$在$f<0$时为0.同时,还可以看到，$p(f)$是由$X(f)$滤波得到的，滤波器频率响应为

$$H_1(f) = \begin{cases} 2 & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \tag{7-81}$$

$H_1(f)$所对应的时间函数为$h_1(t)$，$h_1(t)$可利用单位阶跃信号的频谱

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}t \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{i2\pi f}$$

获得，即是

$$h_1(t) = \delta(t) + i\frac{1}{\pi t} \tag{7-82}$$

由于$p(f)=H_1(f)X(f)$和(7-82)式，得复信号$p(t)$为

$$\begin{aligned} p(t) &= h_1(t) * x(t) \\ &= [\delta(t) + i\frac{1}{\pi t}] * x(t) \\ &= x(t) * \delta(t) + i\frac{1}{\pi t} * x(t) \\ &= x(t) + i\tilde{x}(t) \end{aligned} \tag{7-83}$$

其中$\tilde{x}(t)=\frac{1}{\pi t} * x(t)$.我们称$\tilde{x}(t)$为$x(t)$的希尔伯特变换，并称$h(t) = \frac{1}{\pi t}$为希尔伯特滤波因子，其频谱为

$$H(f)=\begin{cases}-i & f>0\\ i & f<0\end{cases}$$

它还可以表示为

$$H(f)=e^{i\varphi(f)}$$

式中

$$\varphi(f)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} & f>0\\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & f<0\end{cases}\tag{7-84}$$

(7-84)式中的 $\varphi(f)$ 便表示为 90°相移滤波.

4. 理想高通滤波器的脉冲响应

理想高通滤波器的脉冲响应为

$$H_h(f)=\begin{cases}0 & |f|\leqslant f_1\\ 1 & f_1<|f|\leqslant \dfrac{1}{2\Delta}\end{cases}$$

式中 f_1 是高截频率，Δ 是采样间隔.

$H_h(f)$ 可以通过理想低通滤波器的频率响应 $H_1(f)$ 求得，即

$$H_h(f)=1-H_1(f),\ |f|\leqslant\frac{1}{2\Delta}$$

由此式可立即得到相应于 $H_h(f)$ 的时间函数 $h_h(n)$

$$\begin{aligned}h_h(n)&=\int_{\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}}H_h(f)e^{i2\pi\Delta fn}df\\&=\int_{\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}}e^{i2\pi n\Delta f}df-\int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}}H_1(f)e^{i2\pi n\Delta f}df\\&=\frac{1}{\Delta}\delta(n)-\frac{1}{n\pi\Delta}\sin 2\pi f_1 n\Delta\quad(-\infty<n<+\infty)\end{aligned}\tag{7-85}$$

7.5.5 信号采样过程的数学描述

地球物理勘探里，信号分析或采集过程中，为便于计算机进行数字处理，常将获得的连续信号(或模拟信号)进行采样离散. 一个连续信号的离散时间采样过程，可以看作是一个脉冲调幅过程，被

调的脉冲载波是一系列周期为Δt(μs 或 ms)，宽度为T的脉冲方波，即顺序采样脉冲信号，而调制信号就是输入的连续信号. 采样脉冲宽度(指采样后的输出)T越小，采样后的离散子样就越准确地反映出连续信号在离散时间点上的瞬时值，当采样后输出的脉冲宽度$T \ll \Delta t$，采样脉冲就越接近于δ-函数，我们定义这是理想采样，即假设T趋于零的极限情况. 这样所获得的采样序列表示成一个冲激函数序列$\delta(n)$. 如图 7-7 所示.

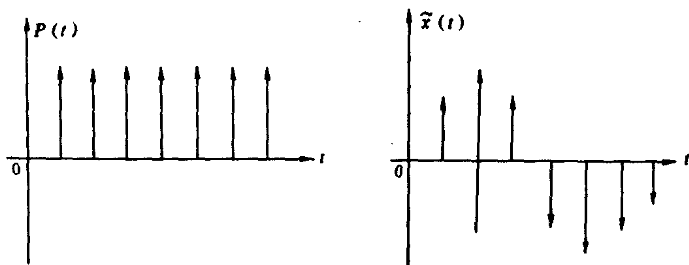


图 7-7　离散脉冲序列

冲击脉冲序列$p(t)$表示为

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta t) \tag{7-86}$$

所以，采样后输出信号的脉冲序列则表示为

$$\tilde{x}(t) = x(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - n\Delta t) \tag{7-87}$$

由于$\delta(t-n\Delta t)$仅在$t=n\Delta t$时不等于零，因此，上式又可写成

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nt)\delta(t - n\Delta t) \tag{7-88}$$

(7-88)式表明理想采样，是连续信号在各采样瞬间值，同相应时间延迟的冲激脉冲δ-函数褶积之和.

离散信号的频谱的描述是必要的，用$X(\omega)$表示原连续信号的频谱，即

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \tag{7-89}$$

用$\tilde{X}(\omega)$表示采样后输出信号的频谱函数，$p(t)$可用傅氏级数表示，

即

$$p(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}C_m e^{im\omega_0 t} \tag{7-90}$$

式中系数 C_m 由下式确定

$$C_m=\frac{1}{\Delta t}\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2}p(t)e^{-im\omega_0 t}dt \tag{7-91}$$

将(7-86)式代入(7-91)式，得

$$C_m=\frac{1}{\Delta t}\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n\Delta t)e^{-im\omega_0 t}dt \tag{7-92}$$

由于在一个周期$\left[-\frac{\Delta t}{2},\frac{\Delta t}{2}\right]$内，仅有一个脉冲 $\delta(t)$，其它脉冲 $\delta(t-n\Delta t)$ 当 $n\neq 0$ 时都在积分区间以外，因此，C_m 又可写成

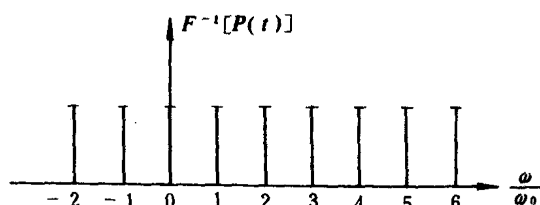


图 7-8　脉冲序列梳状谱

$$C_m=\frac{1}{\Delta t}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}}\delta(t)e^{-im\omega_0 t}dt=\frac{1}{\Delta t}$$

于是，得

$$p(t)=\frac{1}{\Delta t}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{im\omega_0 t} \tag{7-93}$$

(7-93)式说明，冲击脉冲序列 $p(t)$的频谱，是呈梳状的(如图 7-8 所示).

采样后输出信号的频谱则为

$$\widetilde{X}(\omega)=\frac{1}{\Delta t}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-i(\omega-m\omega_0)t}dt$$

由(7-89)式，知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i(\omega-m\omega_0)t}dt = X(\omega - m\omega_0)$$

于是，有

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(\omega - m\omega_0)$$

7.5.6 求取地层反吸收因子的方法

在野外观测到的地震信号，是原来震源发出的尖脉冲 δ-函数为输入信号，经大地滤波后输出的结果. 它大大地降低了对地层的分辨力. 其原因是地层对地震波吸收作用的结果，大地相当于一个低通滤波器，这种吸收作用可以这样来描述. 假设地震波由 A 点开始传播，经过时间 T 后，波向下传播到 B 点，波在这一传播过程中，受到地层的吸收，吸收因子令为 $q(t)$，此时的波函数可表示为

$$x_B(t) = x_A(t) * q(t) \tag{7-94}$$

其中 $x_B(t)$代表 B 点处的波函数，$x_A(t)$是 A 点处的波函数.

在频率域中(7-94)式可表示为

$$X_B(\omega) = X_A(\omega) \cdot Q(\omega)$$

我们要想从观测到的地震记录中，消除地层的吸收作用，则必须求取一个函数 $I(t)$，使其满足

$$q(t) * I(t) = \delta(t) \tag{7-95}$$

其中 $I(t)$是反地层吸收作用的函数，被称为地层反吸收因子，或叫地层吸收补偿函数，$\delta(t)$是尖脉冲函数.

在频率域中(7-95)式，可以写为

$$Q(\omega) \cdot I(\omega) = \delta(\omega) = 1 \tag{7-96}$$

$$I(\omega) = \frac{\delta(\omega)}{Q(\omega)} = \frac{1}{Q(\omega)} \tag{7-97}$$

用所获得的地层反吸收因子 $I(t)$或 $I(\omega)$，对所观测到的地震记录进行滤波，就能消除地层的吸收作用，这可以提高地震记录的分辨力.

7.5.7 地震子波的整形处理方法

在地震勘探资料数字处理中，经常用到地震子波，特别是要求

最小相位的地震子波.炸药爆炸产生的地震子波是最小相位的.而气枪或其它非炸药震源激发的地震子波，往往是非最小相位的，因此，所得到的地震记录也是非最小相位的.如果使地震子波变成最小相位，并且，使地震记录也变成最小相位，这就需要做子波整形处理——最小相位化.我们这里以气枪子波最小相位化处理原理为例，说明 δ-函数在其中的重要应用.

设气枪子波用 $s(t)$表示，使 $s(t)$变成最小相位需借助一个算子 $x(t)$，$x(t)$是待求的，把它与子波 $s(t)$作褶积运算便可获得一个最小相位的子波.设最小相位子波用 $b(t)$表示，即

$$s(t) * x(t) = b(t) \tag{7-98}$$

在频率域内，$s(t)$的频谱函数为 $S(f)$，$x(t)$的频谱函数为 $X(f)$，$b(t)$的频谱函数为 $B(f)$.这样(7-98)式写成频率形式则为

$$S(f) \cdot X(f) = B(f) \tag{7-99}$$

$s(t)$是实函数时，期望输出的最小相位子波 $b(t)$的振幅谱 $|B(f)|$和子波 $s(t)$的能量谱相等.也就是所进行的滤波是纯相位滤波.即用数学形式表示为

$$|S(f)|^2 = |B(f)|^2$$

亦即

$$S(f) \cdot S(-f) = B(f) \cdot B(-f) \tag{7-100}$$

于是，由(7-99)式可得

$$X(f) = \frac{B(f)}{S(f)} = \frac{B(f) \cdot S(-f)}{S(f) \cdot S(-f)} = \frac{B(f) \cdot S(-f)}{B(f) \cdot B(-f)}$$

$$= \frac{S(-f)}{B(-f)} = S(-f) \cdot H(-f) \tag{7-101}$$

其中，$S(-f)$是 $s(t)$的翻转函数 $s(-t)$的频谱，$B(-f)$是 $b(t)$的翻转函数 $b(-t)$的频谱，$H(-f)$是 $h(t)$的翻转函数 $h(-t)$的频谱.又：

$$H(-f) = \frac{1}{B(-f)} \tag{7-102}$$

为了求算子 $x(t)$的频谱 $X(f)$，必须首先求得 $H(-f)$.我们可利用最小平方法，从(7-102)式中求得 $H(-f)$，将(7-102)式重写为

$$H(-f) \cdot B(-f) = 1$$

或

$$H(f)\cdot B(f)=1 \tag{7-103}$$

在时间域内，(7-103)式可写为

$$b(t)*h(t)=\delta(t)$$

或

$$\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} b(t-\tau)h(\tau)=\delta(t) \tag{7-104}$$

$h(t)$和 $b(t)$在最小平方意义下满足

$$Q=\sum_{t=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} b(t-\tau)h(\tau)-\delta(t)\right]^2 \tag{7-105}$$

Q 值最小，且

$$\frac{\partial Q}{\partial h(l)}=0$$

即

$$\frac{\partial Q}{\partial h(l)}=2\sum_{t}\left[\sum_{\tau} b(t-\tau)h(\tau)-\delta(t)\right]\cdot h(t-l)=0$$

对该等式进行整理，得

$$\sum_{\tau}\sum_{t} b(t-\tau)b(t-l)h(\tau)=\sum_{t}\delta(t)b(t-l)$$

上式又可写为

$$\sum_{\tau} h(\tau)R(\tau-l)=\sum_{t}\delta(t)b(t-l) \tag{7-106}$$

(7-106)式右端是单位脉冲 δ-函数与期望子波的互相关函数，仍为一个单位脉冲函数，所以(7-106)式可以表示为

$$\sum_{\tau} R(\tau-l)h(\tau)=\delta(l) \tag{7-107}$$

解此线性方程组，可求得 $h(t)$，再根据(7-101)式求得算子 $x(t)$，即

$$x(t)=s(-t)*h(-t)$$

亦即最小相位化算子 $x(t)$等于气枪子波的翻转序列 $s(-t)$与 $h(t)$翻转序列 $h(-t)$的褶积.

第八章 δ-函数的其他应用

δ-函数的应用领域极为广泛，本章将再列举电动力学、随机分析、水文地质、光学和量子力学中几个例子. 一方面说明诸多领域中，都离不开 δ-函数这个非常有效的数学工具；另一方面也进一步阐明 δ-函数的性质的应用.

§8.1 电动力学的基本方程和辐射能量的计算公式

8.1.1 电动力学的基本方程

在电动力学中，为了计算两个运动着的电子的相互作用能及其辐射能量，必须先建立起经典电动力学的基本方程，即称之为麦克斯韦-罗伦兹(Maxwell-Lorentz)方程. 为了不影响我们的主要任务，即说明 δ-函数的应用，这里略去概念的叙述，首先从被称之为麦克斯韦-罗伦兹的电磁场方程

$$\frac{\partial H_{\mu\gamma}}{\partial x_{\gamma}} = \frac{4\pi e}{c}\int \rho(x-\xi)\dot{\xi}_{\mu} ds \tag{8-1}$$

来讨论. 其中 $H_{\mu\gamma}$称为电磁场张量；λ、μ、γ 为附标，且 $\lambda,\mu,\gamma=0,1,2,3$；$x$ 为 H 的坐标分量；$\dot{\xi}$ 为基本粒子速度矢量的微商；c 为光速；e 为电荷；$\rho(x-\xi)$为电流密度，ds 为粒子坐标的微分元素.

若对于点电荷，有

$$\rho(x-\xi) = \delta(\gamma-\xi)\delta(t-\tau) \tag{8-2}$$

将(8-2)式代入(8-1)式，并利用 δ-函数的性质 1.5，即

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(x-x_k)}{\varphi'(x_k)} \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{8-3}$$

有

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi e}{c}\frac{d\xi_\mu}{d\tau}\delta(\gamma - \xi) \tag{8-4}$$

其中，对 $\delta(t-\tau)$的积分，是在 $\tau=t$ 的条件下积分的. 所以，称(8-4)式为四维情形的麦克斯韦-罗伦兹方程. 我们知道，电磁场张量 $H_{\mu\nu}$与矢势 A 有旋度关系式：

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{8-5}$$

相联系，从而，要确定 $H_{\mu\nu}$，它可以表示为

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \tag{8-6}$$

从而，我们又可以把点源存在的麦克斯韦方程(8-4)式表示为矢量形式

$$\mathrm{rot}H - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi e}{c}v\delta(\gamma - \xi) \tag{8-7}$$

$$\mathrm{div}E = 4\pi e\delta(\gamma - \xi) \tag{8-8}$$

其中，rot$H$ 为磁场强度的旋度，div$E$ 为电场强度的散度，v 是粒子的三维运动速度，即 $v=\frac{d\xi}{d\tau}$.

用三维来表示，(8-5)式便是

$$H = \mathrm{rot}A \tag{8-9}$$

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi \tag{8-10}$$

从而，麦克斯韦-罗伦兹方程的矢量形式便是

$$\mathrm{rot}E + \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{8-11}$$

$$\mathrm{div}H = 0 \tag{8-12}$$

现在我们转而讨论在罗伦兹补充条件

$$\mathrm{div}A + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{8-13}$$

之下，来解方程(8-4)式，以便求得著名的林娜-威夏(Lienard-Wiechert)势. 首先，将(8-5)式代入(8-4)式中，然后利用格林函数

$$G = \frac{c}{4\pi}\delta(R^2 - c^2T^2)(1 + \varepsilon\frac{T}{|T|}) \tag{8-14}$$

则得

$$A_\mu = e\int \xi ds\int \rho(x' - \xi)\delta(R^2 - c^2T^2)(1 + \varepsilon\frac{T}{|T|})(dx') \tag{8-15}$$

其中，$R = r - r'$，$T = t - t'$　$(dx') = (dr')dt$，而 ε 随着我们取推迟势、超前势或这种及另一种势之和的一半，将相应地等于+1、−1 或 0.

对于点电子引用(8-2)式，其推迟势的解可化为

$$A_\mu = e\int \xi_\mu \frac{\delta(\tau - t + \frac{R'}{c})}{cR'} ds \tag{8-16}$$

其中 $R' = \gamma(t) - \xi(\tau)$，$\tau$ 为时间. 将三维运动速度 v 代入，则得标势 φ 及矢势 A 的下列表达式

$$\varphi = e\int \frac{\delta(\tau - t + \frac{R'}{c})}{R'} d\tau \tag{8-17}$$

$$A = \frac{e}{c}\int v(\tau)\frac{\delta(\tau - t + \frac{R'}{c})}{R'} d\tau \tag{8-18}$$

在(8-17)式中，对时间 τ 积分，并考虑到 R' 依存于 τ，以及再次应用 δ-函数的性质 1.5，即(8-3)式，同时，注意

$$\frac{\partial R'}{\partial \tau} = -(\frac{d\xi}{d\tau}R'_{\circ}) = -v_{R'} \tag{8-19}$$

其中，$R'_{\circ} = R'/|R'|$ 是单位矢量，而方程 $\tau - t + \frac{R'}{c} = 0$ 是用来决定时间 τ 的，则有

$$\varphi = \frac{e}{R'\frac{\partial}{\partial \tau}(\tau + \frac{R'}{c})} = \frac{e}{R'(1 - \frac{v_{R'}}{c})} \tag{8-20}$$

$$A = \frac{ev(\tau)}{cR'(1 - \frac{v_{R'}}{c})} \tag{8-21}$$

(8-20)、(8-21)式便是著名的林娜-威夏势.

利用(8-20)、(8-21)式，便可进一步求得两个运动点电荷之间的

相互作用能 V_{12}. 在电动力学中，我们知道，这个作用能的计算公式是：

$$V_{12} = e_1\varphi_2 - \frac{e_1}{c}(v_1 A_2) \tag{8-22}$$

其中 e_1 及 v_1 是第一电子的电荷与速度，而 φ_2 及 A_2 是第二电子在第一电子所在点处产生的电磁势. 如果我们在(8-22)式中，用林娜-威夏势 φ、A 分别代替 φ_2 和 A，则 V_{12} 的值便立即可得了.

由于 V_{12} 依赖于两个不同的时间 t 及 $t-\frac{R'}{c}$，此处的 R' 是二电子间的距离，为此我们把 δ-函数对量 $\frac{R'}{c}$ 展开，即

$$\delta(\tau - t + \frac{R'}{c}) = \delta(\tau - t) + \frac{R'}{c}\frac{d}{d\tau}\delta(\tau - t) + \frac{R'^2}{2c^2}\frac{d^2}{d\tau^2}\delta(\tau - t) + \cdots \tag{8-23}$$

计算 φ_2 时，只取(8-23)式的前三项；计算 A_2 时，只须取第一项便满足要求. 于是，将(8-23)式代入(8-17)和(8-18)式中，并利用 δ-函数的性质1. 2得

$$\varphi_2 = e_2\int \frac{1}{R'}\left[\delta(\tau - t) + \frac{R'}{c}\frac{d}{d\tau}\delta(\tau - t) + \frac{R'^2}{2c^2}\frac{d^2}{dt^2}\delta(\tau - t)\right]d\tau$$

$$= \frac{e_2}{R} + \frac{e_2}{2c^2}\frac{d^2 R}{dt^2} \tag{8-24}$$

$$A_2 = \frac{e_2}{c}\int v(\tau)\frac{1}{R'}\delta(\tau - t)d\tau = \frac{e_2 v_2}{cR} \tag{8-25}$$

其中 R 为二电子间距离，v_2 为第二个电子的速度. R 对 δ-函数和对它的导数的积分，都是对同一时刻 t 进行的，把(8-24)和(8-25)式代入(8-22)中，便可求得二运动的点电荷间的相互作用能 V_{12}.

8. 1. 2　电子的辐射能量

根据电动力学的基本方程(8-11)和(8-12)式，利用林娜-威夏势，从(8-9)和(8-10)式出发，就可以推导出两个运动的电子的辐射能的计算公式.

根据麦克斯韦方程可知，A 和 φ 满足下列非齐次波动方程

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} i = 0 \tag{8-26}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 4\pi\rho = 0 \tag{8-27}$$

其中 i,ρ 分别代表电流和电荷密度，∇ 是哈密顿算子. 从电磁场理论又知方程(8-11)、(8-12)式的解 A、φ 又与所谓罗伦兹条件(8-13)式相联系着. 因此，由(8-26)式解出 A，将(8-13)式对时间 t 积分即可求得 φ 的值.

利用四维傅立叶变换解(8-26)式，并注意其反演定理和褶积定理，得

$$A(x,y,z) = \frac{1}{c}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\left(x',y',z',t-\frac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|}dx'dy'dz' \tag{8-28}$$

其中 $r = xi + yj + zk$，$r' = x'i + y'j + z'k$，$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

$$\varphi(x,y,z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho\left(x',y',z',t-\frac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|}dx'dy'dz' \tag{8-29}$$

$A(x,y,z)$ 称为推迟电势，并且在解得(8-28)、(8-29)式时，假设了当 $r\to\infty$，$|t|\to\infty$ 时，A 与 φ 都趋近于零.

假设电子在 t 时刻的位置是 (x_0,y_0,z_0)，那么，我们取 $i(x',y',z',t) = e\delta(r'-r)V(t_0)$. 其中 $V(t_0)$ 是速度矢量，$\delta(r) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ 为三维 δ-函数. 将 $i(x',y',z',t)$ 的表达式代入(8-28)式中，得

$$A(r,t) = \frac{e}{c}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(r'-r)V\left(t-\frac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|}dx'dy'dz' \tag{8-30}$$

其中 $V(t) = \frac{dr_0}{dt'}$，而 $t' = t - \frac{|r-r'|}{c}$. 于是，有

$$\frac{\partial x_0}{\partial x'} = \frac{\partial x_0}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x'} = -\frac{(x'-x)V_x}{c|r-r'|}$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial x'} = \frac{\partial y_0}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x'} = -\frac{(x'-x)V_y}{c|r-r'|}$$

引用新的积分变数 λ、μ、γ 来分别代替 x'、y'、z'，其中 $\lambda = r' - r_0$，那么，

就有

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x'}=1+\frac{(x'-x)V_x(t')}{c|r-r'|};\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y'}=\frac{(y'-y)V_x(t')}{c|r-r'|}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z'}=\frac{(z'-z)V_x(t')}{c|r-r'|};\qquad \frac{\partial\mu}{\partial x'}=\frac{(x'-x)V_y(t')}{c|r-r'|}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y'}=1+\frac{(y'-y)V_y(t)}{c|r-r'|};\qquad \frac{\partial\mu}{\partial z'}=\frac{(z'-z)V_y(t')}{c|r-r'|}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x'}=\frac{(x'-x)V_z(t')}{c|r-r'|};\qquad \frac{\partial\gamma}{\partial y'}=\frac{(y'-y)V_z(t')}{c|r-r'|}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z'}=1+\frac{(z'-z)V_z(t')}{c|r-r'|}$$

其中 $V_x(t'),V_y(t'),V_z(t')$ 为速度矢量 $V(t)$ 的三个分量. 从而，雅可比行列式为

$$\frac{\partial(\lambda,\mu,\gamma)}{\partial(x',y',z')}=1+\frac{(r'-r)V(t')}{c|r-r'|}$$

即

$$\frac{dx'dy'dz'}{|r-r'|}=\frac{d\lambda d\mu d\gamma}{|r-r'|+\frac{1}{c}|r'-r|V(t')} \tag{8-31}$$

将(8-31)式代入(8-30)，并利用 δ-函数的性质进行简单的积分运算便得

$$A(r,t)=\frac{eV\left(t-\frac{|r-r_0|}{c}\right)}{c|r-r_0|+(r_0-r)V\left(t-\frac{|r-r_0|}{c}\right)} \tag{8-32}$$

令 $R=r_0-r, t'=t-|R|/c$，(8-32)式可化简为

$$A(r,t)=\frac{eV(t')}{c|R|+R\cdot V(t')} \tag{8-33}$$

类似地，于(8-29)式中，将电荷密度代换以 δ-函数，即 $\rho(r,t)=e\delta(r-r_0)$. 所求之纯量势 φ 的表达式为

$$\varphi(r,t)=\frac{ce}{c|R|+R\cdot V(t')} \tag{8-34}$$

在非相对论的速度范围内(即速度 $|V|<<c$ 时)(8-33)式可以

写成

$$A(r,t)=\frac{e}{c|R|}V(t')$$

从而，由(8-10)式知，当半径 R 充分大时，就有

$$H=-\frac{e}{c^2R^2}(R\times V(t'))$$

类似地，可以证明

$$E=\frac{1}{|R|}(R\times H)$$

并且，矢量$c(E\times H)/4\pi$沿一个半径 R 充分大的球面上求积分，便可推出以微小速度 $V(t)$而运动的加速质点，在单位时间内所辐射的能量为$2e^2V^2/3c^3$. 于是，便得到了运动的电子的辐射能量.

从上述推导不难看到，正是利用了电流和电荷密度可以表示为δ-函数这一特性，及其δ-函数固有的性质，才使问题得到顺利的解决；否则，要解(8-29)和(8-30)式，将是极为困难的，即使解出来，其复杂程度也会令人生畏的.

§8.2 富克尔-普郎克(Fokker-Planck)方程

本节将通过随机过程中，推导重要的富克尔-普郎克方程，说明δ-函数的性质的应用.

我们知道，随机过程可以按记忆性分类，在各个时刻由随机过程所定义的随机变量之间都互相独立时，称为没有记忆的随机过程或称为纯粹随机过程；当现在时刻的随机变量只依赖于最近的前一时刻的随机变量时，称为一步记忆的随机过程，或称为马尔可夫过程.当依赖于前几个时刻的随机变量时，则称为多步记忆的随机过程，或称为高阶马尔可夫过程.

用δ-函数表示阶梯函数在跳跃点上的导数，那么，它们也可具有相应的密度函数. 设随机变量 X 仅在$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$点上有值，则它的概率密度函数可表示为

$$f_{(x)}(X) = \sum_{j=1}^{n} P_j \delta(x - x_j) \tag{8-35}$$

其中 $P_j = P(x = x_j), j = 1, 2, \cdots, n$.

马尔可夫过程 $X(t)$完全由其一阶概率密度函数 $f_{(x)}(x_0, t_0)$及其转移概率密度函数 $q_{(x)}(x, t | x_0, t_0)$所描述. 若 $f_{(x)}(x_0, t_0)$已知，则过程的性质完全由 $q_{(x)}(x, t | x_0, t_0)$所决定，同时，又知 $q_{(x)}(x_1, t | x_0, t_0)$是由查普曼-柯尔莫哥洛夫-斯莫卢乔斯基(Chapman-Kolmogorov-Smoluchowsk)方程

$$q_{(x)}(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_{(x)}(x, t | x_1, t_1) q_{(x)}(x_2, t_2 | x, t) dx \tag{8-36}$$

所控制.

(8-36)式这个积分方程，一般总是通过与其等效的微分方程来确定转移概率密度函数的. 那么，如何找到这个微分方程，便是下面要完成的主要任务.

先将(8-36)式改写成

$$q_{(x)}(x, t + \Delta t | x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_{(x)}(x', t | x_0, t_0) q_{(x)}(x, t + \Delta t | x', t) dx \tag{8-37}$$

并用 $M_{(x)}(\theta, t + \Delta t | x', t)$表示随机变量 $\Delta X = x(t + \Delta t) - x(t)$在条件 $x(t) = x'$下的条件特征函数，即

$$M_{(x)}(\theta, t + \Delta t | x', t) = E[e^{i\theta \Delta x} | x', t] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta \Delta x} q_{(x)}(x, t + \Delta t | x', t) dx \tag{8-38}$$

其中 $\Delta x = x - x'$.

为了保证上述特征函数的存在，转移概率密度函数应该是标准化了的，即对任意的 x'、t 及 Δt，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q_{(x)}(x, t + \Delta t | x', t) dx = 1 \tag{8-39}$$

为了求得(8-38)式中的 $q_{(x)}(x, t + \Delta t | x', t)$，取(8-38)式的傅氏逆变换，即得

$$q_{(x)}(x, t + \Delta t | x', t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta \Delta x} M_{(x)}(\theta, t + \Delta t | x', t) d\theta \tag{8-40}$$

将 $M_{(x)}(\theta,t+\Delta t|x',t)$ 在 $\theta=0$ 附近展成泰勒级数，即

$$M_{(x)}(\theta,t+\Delta t|x',t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}a_n(x',t) \tag{8-41}$$

其中设 $a_n(x',t)(n=1,2,\cdots)$ 都存在，且表达式为

$$a_n(x',t)=E[(\Delta x)^n|x',t]=E\{[x(t+\Delta t)-x(t)]^n|x(t)=x'\} \tag{8-42}$$

将(8-41)式代入(8-40)式，得

$$q_{(x)}(x,t+\Delta t|x',t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\theta\Delta x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}a_n(x',t)d\theta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}a_n(x',t)\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-i\theta)^n e^{-i\theta\Delta x}d\theta$$

又由 δ-函数的性质1.4，即

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-i\theta)^n e^{-i\theta\Delta x}d\theta=\frac{\partial^{(n)}\delta(\Delta x)}{\partial x^n}.$$

所以，(8-40)式变为

$$q_{(x)}(x,t+\Delta t|x',t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}a_n(x',t)\ \frac{\partial^{(n)}\delta(\Delta x)}{\partial x^n} \tag{8-43}$$

再由 δ-函数的性质1.3

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta^{(n)}(x-\xi)dx=(-1)^n f^{(n)}(\xi)$$

于是，将(8-43)式代入(8-37)式，则得

$$q_{(x)}(x,t+\Delta t|x_0,t_0)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}q_{(x)}(x',t|x_0,t_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}a_n(x',t)\ \frac{\partial^{(n)}\delta(\Delta x)}{\partial x^n}dx'$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}q_{(x)}(x',t|x_0,t_0)a_n(x',t)\ \frac{\partial^{(n)}\delta(\Delta x)}{\partial x^n}dx'$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\ \frac{\partial^{(n)}}{\partial x^n}[a_n(x',t)q_{(x)}(x,t|x_0,t_0)]$$

请注意，当 $\Delta x=0$，即 $x'=x$，上式变为

$$q_{(x)}(x,t+\Delta t|x_0,t_0)-q_{(x)}(x,t|x_0,t_0)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\ \frac{\partial^{(n)}}{\partial x^n}[a_n(x,t)q_{(x)}(x,t|x_0,t_0)] \tag{8-44}$$

在(8-44)式两端除以 Δt,并当 $\Delta t\to 0$时取极限,得

$$\frac{\partial}{\partial t}q_{(x)}(x,t|x_0,t_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^{(n)}}{\partial x^n}[a_n(x,t)q_{(x)}(x,t|x_0,t_0)]$$

(8-45)

其中

$$a_n(x,t)=\lim_{\Delta t\to 0}(\frac{1}{\Delta t})E\{[x(t+\Delta t)-x(t)]^n|x(t)=x\}$$

(8-46)

一般称 $a_n(x,t)$为随机过程 $X(t)$的导数矩. (8-45)式便是我们要求的,与控制转移概率密度函数积分方程(8-36)式等效的微分方程. 当给定了随机过程的导数矩、适当的初始条件和边界条件时,转移概率密度函数就可以由(8-45)式确定出来.

然而(8-45)式,在实际应用中局限性很大,因为一般不可能考虑对空间坐标的无穷阶导数的情况,所以只有当少数几个非零的导数矩时,这方法才有效. 也就是当 $q_{(x)}(x,t|x_0,t_0)$满足条件:随机过程是连续的;$a_1(x,t)$、$a_2(x,t)$存在,且当 $n\geqslant 3$时,$a_n(x,t)=0$;偏导数$\frac{\partial q}{\partial t}$、$\frac{\partial q}{\partial x}$、$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$、$\frac{\partial q}{\partial x_0}$、$\frac{\partial^2 q}{\partial x_0^2}$存在;又满足相应的标准化条件(8-39)式(一般把满足这些条件的马尔可夫过程称为扩散过程). 实际上这些条件是物理学中从对微粒随机扩散运动(如布朗运动)的研究中抽象出来的,其特点是在任何一很短时间内,质点都可能发生位移,然而位移量却很小,因此,可以想象在一定条件下,质点的轨道是以概率表示的连续函数(当然,这点同跳跃型的泊松过程,在物理性质上是不同的). 于是,(8-45)式就有如下的简单形式

$$\frac{\partial}{\partial t}q_{(x)}(x,t|x_0,t_0)+\frac{\partial}{\partial x}[a_1(x,t)q_{(x)}(x,t|x_0,t_0)]$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[a_2(x,t)q_{(x)}(x,t|x_0,t_0)]=0 \qquad (8\text{-}47)$$

其中,初始条件为 $q_{(x)}(x,t|x_0,t_0)=\delta(x-x_0)$.

在马尔可夫过程理论中,常把(8-47)式称为富克尔-普朗克方程,有时也叫柯尔莫哥洛夫向前方程. 因为,其中的转移概率密度函

数是随着时间向前运动的向前变量 x 和 t 的函数.

§8.3 地下水非稳定流中群孔同时抽水的干扰井的计算公式

由于 δ-函数能够描述一些普通函数所无法刻划的物理现象，如开采地下水时（包括加灌），因为抽水量集中在很小的井口面积上，所以，抽水量与井口面积之比是一个很大的量，近似作用于一点的情况，因此，便可以引用 δ-函数来描述，并为后来的计算带来很大的方便.

根据地下水非稳定流理论，可将水头 h 所满足的数学模型，简化为如下偏微分方程的初边值定解问题

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
\mu^* \dfrac{\partial h}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}(T\dfrac{\partial h}{\partial x}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(T\dfrac{\partial h}{\partial y}) + \varepsilon - \sum\limits_{i=1}^{N} q_i\delta(x - x_i, y - y_i) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,y) \in G, t > 0 \\
h(x,y)|_{t=0} = h_0(x,y) \qquad\qquad\qquad (x,y) \in G \\
h(x,y)|_{\Gamma_1} = h_1(x,y,t) \qquad\qquad\qquad (x,y) \in \Gamma_1, t > 0 \\
T\dfrac{\partial h}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = Q(x,y,t) \qquad\qquad\qquad (x,y) \in \Gamma_2, t < 0
\end{cases}
$$

其中 G 为开采区的平面区域，Γ 为 G 的边界，$h(x,y,t)$ 为 G 内 (x,y) 点 t 时刻的水头，μ^*、T 分别为单性储存系数、导水系数，且都是 x,y 的函数，$\varepsilon(x,y,t)$ 为越流补给强度，Γ_1、Γ_2 为已知水头的补给量的边界，$Q(x,y,t)$ 为 Γ_2 上的补给量，n 为外法线，q_i 和 (x_i,y_i) 分别为第 i 口井的开采量及井口的坐标，$\delta(x-x_i,y-y_i)$ 是 (x_i,y_i) 点的二维 δ-函数.

为了便于求解，再对定解问题（Ⅰ）理想化，即假设承压含水层是均质、等厚、产状水平、自然水力坡度为零，越流补给可略而不计，含水层延伸无限，并在无限远处不受抽水的影响，再设有 n 口抽水井，对于这样一个具体的承压水流向干扰井的运动规律就是把定解问题（Ⅰ）变为如下的定解问题（Ⅱ）

$$(\text{I})\begin{cases}\dfrac{\partial h}{\partial t}=a\left(\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)-\dfrac{1}{\mu^*}\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i\delta(x-x_i,y-y_i) \\ \qquad\qquad (-\infty<x/y<+\infty,t>0) \\ h(x,y,t)\big|_{t=0}=H \qquad (-\infty<x/y<+\infty) \\ \lim\limits_{|x|\to\infty}h(x,y,t)=\lim\limits_{|y|\to\infty}h(x,y,t)=H \qquad (t>0) \\ \lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{\partial h}{\partial x}=\lim\limits_{|y|\to\infty}\dfrac{\partial h}{\partial y}=0 \qquad (t>0)\end{cases}$$

其中 a 为传导系数，H 为 $t=0$时刻的水位.

在平面非稳定流的定解问题中，常归结为形如(Ⅰ)式的非齐次初边值条件的定解问题，由本书的第二章我们知道，非齐次初边值条件定解问题，可以经过适当变换，转化为齐次初边值条件的定解问题. 并且，非齐次线性方程齐次初边值条件定解问题的解具有迭加性. 所以，作代换 $v=m(H-h)$，只要求得与(Ⅰ)式相应的齐次初边值定解问题

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=a\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\dfrac{m}{\mu^*}\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i\delta(x-x_i)\delta(y-y_i) \\ \qquad\qquad (-\infty<x/y<+\infty,t>0) \\ v(x,y,t)\big|_{t=0}=0 \qquad (-\infty<x/y<+\infty) \\ \lim\limits_{|x|\to\infty}v(x,y,t)=\lim\limits_{|y|\to\infty}v(x,y,t)=0 \qquad (t>0) \\ \lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\lim\limits_{|y|\to\infty}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (t>0)\end{cases}$$

的解即可. 其中 v 为势函数，m 为开采层顶板和底板的厚度，利用 δ-函数的积分性质1. 2，(Ⅱ)的解可以通过无外界补给时，地下水流向完整井的计算公式

$$v(x,y,t)=\frac{1}{4\pi k}\int_0^t\frac{Q_i(\tau)}{t-\tau}e^{-(x^2+y^2)/4a(t-\tau)}d\tau \tag{8-48}$$

给出. 再由解的迭加性，并注意代换 $v=m(H-h)=ms$. 所以，定解问题(Ⅰ)的解为

$$s=\frac{1}{4\pi mk}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\frac{Q_i(\tau)}{t-\tau}e^{-r_i^2/4a(t-\tau)}d\tau \tag{8-49}$$

当 Q_i 为常数时，即抽水量固定，并将该式中的积分用 $W(\frac{r_i^2}{4at})$ 表示，则从(8-49)式便得到定解问题(Ⅱ)的解为

$$v=\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{4\pi k}\int_0^t\frac{1}{t-\tau}e^{-r_i^2/4a(t-\tau)}d\tau$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{4\pi k}W(\frac{r_i^2}{4at}) \tag{8-50}$$

再通过代换 $v=m(H-h)$，立即可求得定解问题(Ⅰ)的解，于是(8-50)式，便是在一定条件下群孔同时抽水的干扰井的计算公式.

(8-50)式既可计算出干扰井抽水时，含水层中任意时间、任意一点的水位降深值；又可以在满足开采量、使用年限及允许降深等条件下，为供水设计求出合理井距、制定布井方案，还能用抽水试验资料计算水文地质参数.

§8.4 δ-函数在光学衍射中的应用

一束平面波射到一个衍射孔时，距孔甚远处的衍射线的角分布，与从小孔发出的波前的振幅和相位的空间分布有关.

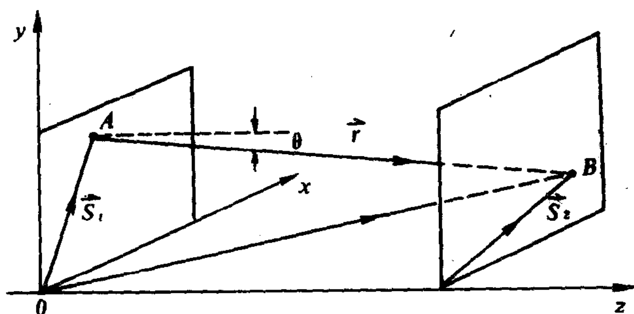


图8-1

如考虑沿如图8-1之 z 坐标轴的正向，朝着 $z=0$ 平面上的小孔行进的一个平面波扰动，小孔便改变了波阵面的相位与振幅. 而该扰动

继续前进，就在 $z>0$ 的半空间中形成衍射波的花样.

若令 R 为点 (x,y,z) 相对于坐标原点的位置矢量，为方便起见，将坐标原点取在小孔径内某处，这个位置表示成 (s,z)，这里 s 为 oxy 平面上的一个矢量，其分量为 x 与 y（即 s 为 R 在 oxy 平面上的投影）. 有时必须将 $z=0$ 平面（即小孔所在平面）上的点 A 与衍射场中的点 B 的位置区分开，则就分别以 (s,o) 和 (s,z) 表示 A 与 B 的位置. 令 r 为自 A 到 B 的矢量，则 $R=s+r$. 并且用 θ 表示 r 与 z 轴间的夹角.

这里我们不去揭示光学衍射中诸多原理和公式，仅就几个具体实例，看 δ-函数在推导能流密度和功率谱中的重要应用.

用一维傅立叶变换代替二维傅立叶变换，来描述二维空间运动的波在一维孔径上的衍射，并把矢量形式简化为标量形式. 为此，设孔径函数 $f(x,0)$ 及其傅氏谱 $F(q,0)$，由平面孔与透镜的相干衍射理论知道，孔径函数的能流密度 σ 和功率谱 I，可分别表示为

$$\sigma=\frac{k}{2\pi}|F(q,0)|^2=\frac{k}{2\pi}s_f(q,0) \tag{8-51}$$

$$I=\lim_{L\to\infty}\frac{k}{2\pi}\frac{1}{L}|F_L(q,0)|^2=\frac{k}{2\pi}P_f(q,0) \tag{8-52}$$

其中 k 为波数，L 为某个面积 S 的最大直径.

无限宽衍射光屏在物理上显然是不可能实现的，但是它对于描述某些孔径的重要特征来说，是一种比较方便的抽象. 以下我们利用 δ-函数来推导其功率谱.

设孔径函数 $f(x,0)$ 按某种方式重复，则其傅氏谱为

$$F(q,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iqx}f(x,0)dx=\sum_{s}a_s\delta(q-q_s) \tag{8-53}$$

从而由(8-52)式，也就是将 δ-函数的幅度的模，直接平方再除以 2π，即得到功率谱

$$\begin{aligned}I&=\frac{k}{(2\pi)^2}\sum_{s}|a_s|^2\delta(q-q_s)\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{s}|a_s|^2\delta(\theta-q_s/k)\end{aligned} \tag{8-54}$$

对于振幅调制的无穷大光栅，孔径函数可表示为

$$f(x,0)=A+B\cos(2\pi x/x_0),x\in(-\infty,+\infty) \quad (8\text{-}55)$$

由傅氏变换公式可知，它的谱函数为

$$F(q,0)=2\pi A\delta(q)+\pi B\delta(q-2\pi/x_0)$$
$$+\pi B\delta(q+2\pi/x_0) \quad (8\text{-}56)$$

并将(8-56)式代入(8-52)式，便得其功率谱为

$$I=A^2\delta(\theta)+\frac{B^2}{4}\{\delta(\theta-\lambda/x_0)+\delta(\theta+\lambda/x_0)\}$$

其中 λ 为波长.

对于无穷大折射光劈或棱镜，具有使波阵面的相位改变为一个与 x 成比例的量的效果，不妨设为 ax. 在这种情况下，可利用公式

$$2\pi A\delta(y-y_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{iyx}e^{-iy_0x}dx$$

来解决，并且，由傅氏变换公式可得功率谱为

$$I=\delta(\theta-a\lambda/2\pi) \quad (8\text{-}58)$$

波长 λ 与波数 k 的关系为 $k=2\pi/\lambda$. (8-58)式这一结果，与从棱镜得到的轮廓清楚而偏移的线束相对应.

厚度周期变化的折射薄板的孔径函数，具有恒定的振幅，但是相位作周期变化，若厚度随周期 x_0作周期变化，则

$$f(x,0)=\exp[ia\cos(2\pi x/x_0)] \quad (8\text{-}59)$$

并且，根据傅氏变换公式，立即可得其功率谱为

$$I=\sum_{n=-\infty}^{-\infty}\{J_n(a)\}^2\delta(\theta-n\lambda/x_0) \quad (8\text{-}60)$$

其中 $J_n(a)$为 n 阶贝塞尔函数.

无穷大狭缝光栅可用如下孔径函数来描述

$$f(x,0)=f_0(x)*g(x)$$

其中，$f_0(x)$由一列表示狭缝位置的 δ-函数组成，而 $g(x)$是一个狭缝的特征孔径函数. 其傅氏谱函数设为 $G(q)$，若狭缝按规则排列，则其傅氏谱 $F_0(q)$由 δ-函数组成，即

$$F(q,0)=G(q)\sum_n a_n\delta(q-q_n) \quad (8\text{-}61)$$

由(8-54)式可导出其功率谱为

$$I = \frac{1}{(2\pi)^2}|G(k\theta)|^2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |a_s|^2 \delta(\theta - q_s/k) \tag{8-62}$$

作为该问题一个特例,当狭缝之间严格按等间距 x_0 排列时,即按孔径函数

$$f(x,0) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A\delta(x - nx_0)$$

及其谱函数

$$F(q,0) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi A}{x_0}\delta(y - n\frac{2\pi}{x_0})$$

$\theta = \pm n\lambda/x_0, (n=1,2\cdots)$来排列,或者按着孔径函数

$$f(x,0) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0)(A + a\cos y_0 x) \tag{8-63}$$

或

$$f(x,0) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0)(A + a\sin y_0 x) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2\cdots) \tag{8-64}$$

排列,则相应的离散傅氏谱分别为

$$\sum_s \frac{2\pi}{x_0}\{A\delta(y - n\frac{2\pi}{x_0}) + \frac{a}{2}\delta(y - n\frac{2\pi}{x_0} + y_0) + \frac{a}{2}\delta(y - \frac{2\pi}{x_0} - y_0)\} \tag{8-65}$$

$$\sum_s \frac{2\pi}{x_0}\{A\delta(y - n\frac{2\pi}{x_0}) + \frac{ia}{2}\delta(y - n\frac{2\pi}{x_0} + y_0) - \frac{ia}{2}\delta(y - n\frac{2\pi}{x_0} - y_0)\} \tag{8-66}$$

这便给出了峰锐的衍射极大位置.这也说明了当振幅或狭缝位置出现周期性“误差”时,在每个主衍射极大位置的两侧,便会出现“伴峰”.

若利用(8-51)式和(8-52)式的矢量形式,孔径函数表示为 $f_0(s)$ 与 $g(s)$ 的褶积,即

$$f(s,0) = f_0(s) * g(s) \tag{8-67}$$

且其傅氏谱为

$$F(q,0) = F_0(q)G(q) \tag{8-68}$$

由(8-51)式可知其能流密度为

$$\sigma = \frac{k^2}{(2\pi)^2}|F_0(q)|^2|G(q)|^2 \tag{8-69}$$

其中 $f_0(s)$是由表示各个孔的位置的 δ-函数组成，而 $g(s)$为单个孔的孔径函数，于是，无限大衍射光屏若按规则排列，则 $F(q,0)$可表示为：

$$F(q,0) = \sum_s a_s\delta(q - q_s) \tag{8-70}$$

将(8-70)式代入(8-52)式的矢量形式中，立即可得功率谱为

$$I = \frac{k^2}{(2\pi)^4}\sum_s |a_s|^2\delta(q - q_s) \tag{8-71}$$

作为一个特例，我们考虑的是无限多个成规则排列的相同的孔，则与(8-67)式和(8-68)式一样，其孔径函数的傅氏谱为

$$F(q,0) = G(q)\sum_s a_s\delta(q - q_s) \tag{8-72}$$

于是，不难导出相应的功率谱为

$$I = \frac{k^2}{(2\pi)^4}|G(q)|^2\sum_s |a_s|^2\delta(q - q_s) \tag{8-73}$$

限于篇幅，本节内容到此为止. 从光学的衍射理论而言，这里是寥寥无几；但是从 δ-函数的应用方面来看，这里已充分显示出它的重要性.

§8.5　量子力学中粒子动量的平均值

量子力学中，由于物质的二象性，即颗粒性和波动性，以及关于波函数 ψ 的德布罗意的统计解释，粒子坐标 X 的平均值或期望值，可以表示为

$$\langle X\rangle = \int \psi^* (X,t) X \psi(X,t) d^3 x^* \tag{8-74}$$

其中把$|\psi|^2$记成$\psi^*\psi$，而把X插在中间. 该公式便是对X进行多次重复测量的预期结果. 类似地，X的任何函数，如粒子的势能$U(X)$的平均值或期望值便可表示为

$$\langle U\rangle = \int \psi^* (X,t) U(X) \psi(X,t) d^3 x \tag{8-75}$$

我们知道除非德布罗意波是单色平面波，否则粒子没有唯一确定的动量值. 所以，促使我们必须研究，在一般情况下粒子动量的平均值.

实验证明，任何波函数总可以通过傅氏变换将其表示为单色平面波的迭加，即

$$\begin{aligned}\psi(X,t) &= (2\pi)^{-3/2} \int \Phi'(K,t) e^{iK\cdot X} d^3 k \\ &= (2\pi h)^{-3/2} \int \Phi(P,t) e^{ip\cdot X/h} d^3 P\end{aligned} \tag{8-76}$$

其中p为粒子的动量，h为普朗克常数，$\Phi(p,t)$是权函数，为了便于讨论，通常取成高斯误差函数.

当对波函数为ψ的粒子，测量其动量，可知动量为P的粒子数（或者说测量到动量p的几率）与$(2\pi h)^{-3}|\Phi(p,t)|^2$成比例，因而，平均动量可表示为

$$\langle p\rangle = \frac{\int \Phi^* p \Phi d^3 P}{\int \Phi^* \Phi d^3 P} \tag{8-77}$$

我们取(8-75)式的傅氏逆变换，得

$$\Phi(p,t) = (2\pi h)^{-\frac{3}{2}} \int \psi(X,t) e^{-ip\cdot X/h} d^3 x \tag{8-78}$$

---

* 在量子力学中，三重积分从$-\infty$到$+\infty$的积分限，习惯地记为$\int \psi^* (X,t) X \psi(X,t) d^3 x$，以下同.

将(8-78)式代入(8-77)式中，并设 ψ 已经归一化，分别计算其分子和分母，即可求出 $\langle P\rangle$ 的值. 于是：

$$\int \Phi^* \Phi d^3P = \int d^3x'\psi^*(X',t)\int d^3X\psi(X,t)\cdot \int \frac{d^3P}{(2\pi h)^3}\exp\left[\frac{i}{h}P\cdot(X'-X)\right] \qquad (8\text{-}79)$$

其中，由 δ-函数的积分表达式. 可知

$$\delta(X'-X) = \int \frac{d^3P}{(2\pi h)^3}\exp\left[\frac{i}{h}P\cdot(X'-X)\right]$$

从而，(8-79)式变为

$$\int \Phi^* \Phi d^3P = \int d^3X'\psi^*(X',t)\int d^3X\psi(X,t)\delta(X'-X)$$

$$= \int d^3X'\psi^*(X',t)\psi(X'-t) = 1 \qquad (8\text{-}80)$$

(8-80)式在里层积分运算中，应用了 δ-函数的积分性质，得 $\psi(X',t)$. 把(8-80)式的结果代入(8-77)式中，即分母为1，于是，得

$$\langle P\rangle = \int \Phi^*(P,t)P\Phi(P,t)d^3P \qquad (8\text{-}81)$$

再将(8-78)式代入(8-81)式中，因为：

$$\int \frac{d^3P}{(2\pi h)^3}P\exp\left[\frac{i}{h}P\cdot(X'-X)\right]$$

$$= -\frac{h}{i}\nabla_x\int \frac{d^3P}{(2\pi h)^3}\exp\left[\frac{i}{h}P\cdot(X'-X)\right]$$

$$= -\frac{h}{i}\nabla_x\delta(X'-X)$$

其中 ∇ 是哈密顿算符，即 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$，而 ∇_x 表示在 x 轴方向上的分量. 利用 δ-函数的性质1.3，有

$$\int \psi(X,t)\nabla_x\delta(X'-X)d^3X = -\psi(X,t)$$

所以，得

$$\langle P\rangle = \int \psi^*(X,t)\frac{h}{i}\nabla\psi(X,t)d^3X \qquad (8\text{-}82)$$

同理，可以推导出动量 P 的任意函数 $f(P)$ 的平均值或者说是期

待值，即

$$\langle f(P)\rangle=\int\psi^*(X,t)f(\frac{\hbar}{i}\nabla)\psi(X,t)d^3X \tag{8-83}$$

以及粒子的平均动能为：

$$\langle T\rangle=\int\psi^*(X,t)[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(X,t)]d^3X \tag{8-84}$$

(8-82)、(8-83)、(8-84)三式，都是量子力学中的重要公式，只要给出波函数，则由这三个公式均可算出相应的动量的平均值、关于动量的任意函数的平均值和粒子的平均动能.

关于 δ-函数在量子力学中的应用，也可以写出一本内容丰富多彩的专著来，然而，由于专业性较强，以及本书篇幅所限，这里只好到此为止了.有兴趣的读者，可参考本书后面所提供的参考书.

参考文献

1. 谷超豪等，“数学物理方程”，人民教育出版社，1979年。

2. 梁昆淼，“数学物理方法”，人民教育出版社，1979年（第二版）。

3. 欧维义，“数学物理方程”，吉林科学技术出版社，1985年。

4. 欧维义等，“高等数学”，吉林大学出版社，1986年。

5. 吴智泉等，“数学分析”，吉林大学出版社，1989年。

6. 程乾生，“信号数字处理的数学原理”，石油工业出版社，1979年。

7. 胡征、樊昌信，“沃尔什函数及其在通信中的应用”，人民邮电出版社，1980年。

8. 郑钧，“线性系统分析”，科学出版社，1979年。

9. N·阿罕麦德、K·R·罗（胡正名、陆传赉译），“数字信号处理中的正交变换”，人民邮电出版社，1979年。

10. 郑君里，“信号与系统”，人民教育出版社，1982年。

11. Д·иваненко и А·соколов，“классическая теория поля”（издание второе гостехиздат）1951г。

12. D·C·champeney，“Fovrier transforms and their physical applications”，Academic press，London，1973。

13. E·J·默斯（葛明浩译），“Z变换”，人民教育出版社，1980年。

14. A·V·Oppenheim、R·W·Schafer：“Digital signal processing”，prentice—Hall Inc，1975.

15. I·N·史奈登（何衍璿、张燮译），“傅立叶变换”，科学出版社，1950年。

16. D·E·纽兰（方同等译），“随机振动与谱分析概论”，机械工业出版社，1979年。

17. E·O·布赖姆（柳群译），“快速傅立叶变换”，上海科学技术出版社，1979年。

18. P·A·M·Dirac，“The principles of Quantum Mechanies” 1947。

19. 钱学森著，“物理力学讲义”，科学出版社，1962 年。

20. C·Л·索波烈夫、A·И·吉洪诺夫著（黄克欧译），“数学物理方程”（上、下册），高等教育出版社，1956 年。

21. 星谷胜著（常宝琦译），“随机振动分析”，地震出版社，1977 年。

22. 周衍柏编，“理论力学教程”，人民教育出版社，1979 年。

23. 程守洙等编，“普通物理学”（1—3 册），人民教育出版社，1982 年。

24. 曾谨言编，“量子力学”，科学出版社，1981 年。

25. H·H·波戈留波夫、Д·B·希尔科夫编（董明德译），“量子场论导引”，科学出版社，1966 年。

26. M·玻恩、E·沃耳夫著（杨葭荪译），“光学原理”（上、下册），科学出版社，1978 年。

27. J·D·克劳斯著（安绍萱译），“电磁学”，人民邮电出版社，1979 年。

28. 阙仲元编，“电动力学教程”，人民教育出版社，1979 年。

29. 李政道著，“场论与粒子物理学”，科学出版社，1981 年。

30. 陈天与、徐中信，“物探数据处理的数学方法”，地质出版社，1982 年。

31. 何樵登编，“地震波理论”，地质出版社，1988 年。

32. 董敏煜编，“地震勘探信号分析”，石油大学出版社，1989 年。

33. 杨天行、付泽周，“二维 δ-函数及其在非稳定流运动中的应用”，长春地质学院学报，1979 年第三期 PP. 68—86。

34. V·Shtivelman：“混合方法的二维声波模拟”，《石油物探译丛》1987 年第三期。

35. 贺振华主编，“反射地震资料偏移处理与反演方法”，重庆大学出版社，1989 年。

36. 张　卿，“多维快速循环褶积的计算”，《数值计算与计算机应用》，1986 年第一期 PP. 48—56。

37. B·H·斯特拉浩夫、Г·M·瓦连斯柯（张卿译），“线性不适定问题的自适应正则化方法及其在解重磁问题中的应用”，《石油物探译丛》1989 年第四期，PP. 1—17。

38. 张　卿：“积分变换”，长春地质学院，1984 年吉林省出版局准印教材。

[General Information]
书名=δ-函数及其应用
作者=赵为礼　张卿　杨有发编著
页数=377
SS号=11529872
DX号=
出版日期=1992年06月第1版
出版社=吉林科学技术出版社

封面
书名
版权
前言
目录
第一章　δ-函数
§1.1　δ-函数的定义
§1.2　弱收敛
1.2.1　弱收敛的定义
1.2.2　把δ-函数看作普通函数的弱极限
1.2.3　磨光算子
§1.3　δ-函数的几何意义与物理意义
1.3.1　几何意义
1.3.2　物理意义
§1.4　间断函数的导数
1.4.1　弱相等的概念
1.4.2　间断函数的导数
§1.5　δ-函数的性质
§1.6　高维δ-函数
1.6.1　高维δ-函数的定义
1.6.2　高维δ-函数的性质
1.6.3　高维δ-函数的几何意义与物理意义
1.6.4　n维磨光算子
§1.7　δ-函数的数学理论简介
1.7.1　有关泛函的一些基本概念
1.7.2　δ-函数与广义函数的定义
1.7.3　广义函数的基本运算
第二章　杜哈美（Duhamal）原理
§2.1　迭加原理
§2.2　一些简例的启示
§2.3　杜哈美（Duhamal）原理

2.3.1　杜哈美（Duhamal）原理及其证明
2.3.2　杜哈美（Duhamal）原理的实质、意义及其适用范围
§2.4　杜哈美（Duhamal）原理的物理意义
§2.5　杜哈美（Duhamal）原理的应用举例
§2.6　杜哈美（Duhamal）原理的另一种形式
第三章　积分变换
§3.1　傅氏变换
3.1.1　傅氏变换的定义
3.1.2　傅氏变换的性质
3.1.3　多元函数的傅氏变换
3.1.4　傅氏变换法的应用举例
§3.2　拉氏变换
3.2.1　拉氏变换的概念
3.2.2　拉氏变换存在定理
3.2.3　拉氏变换的性质
3.2.4　拉氏逆变换的求法
3.2.5　多元函数的拉氏变换
3.2.6　拉氏变换法的应用举例
第四章　解数学物理方程的格林（Green）函数法
§4.1　初值问题的Green函数与Green函数法
4.1.1　热传导方程初值问题的Green函数与Green函数法
4.1.2　波动方程初值问题的Green函数与Green函数法
4.1.3　Green函数概念的进一步引伸
§4.2　位势方程定解问题的Green函数与Green函数法
4.2.1　三维位势方程定解问题的Green函数法
4.2.2　二维位势方程定解问题的Green函数法
§4.3　混合问题的Green函数与Green函数法

第五章　δ-函数在数字信号处理中的应用
§5.1　数字信号处理简介
§5.2　任意离散信号均可表示为δ-函数的加权和
5.2.1　单位脉冲序列的概念
5.2.2　任意序列均可表示为脉冲序列的加权和
5.2.3　线性时不变系统和离散褶积
§5.3　等间隔脉冲序列的谱仍是脉冲序列
5.3.1　抽样序列的频谱
5.3.2　连续谱与离散谱之间的关系
5.3.3　抽样定理
5.3.4　离散傅氏变换（DFT）
5.3.5　离散傅氏逆变换
5.3.6　离散傅氏变换的性质
5.3.7　快速傅氏变换（FFT）简介
5.3.8　δ-函数在？变换中的应用
§5.4　希尔伯特（Hilbert）变换
5.4.1　实连续信号的希尔伯特变换
5.4.2　实离散信号的希尔伯特变换
5.4.3　？变换谱的希尔伯特变换
5.4.4　周期序列傅氏谱的希尔伯特变换
第六章　δ-函数在振动理论中的应用
§6.1　线性系统
6.1.1　线性方程的经典解法
6.1.2　脉冲响应法
6.1.3　频率响应法
§6.2　用δ-函数表示系统所受的力
§6.3　持续力表示为瞬时力的迭加
第七章　δ-函数在地球物理勘探中的应用
§7.1　应用δ-函数描述地震源的脉冲波
§7.2　地震波波动理论的讨论

7.2.1　标量介质——时间简谐震源情况下二维波动理论讨论中δ-函数的应用
7.2.2　标量介质——脉冲震源情况下δ-函数的应用
7.2.3　弹性介质——线力情况下δ-函数的应用
7.2.4　基尔霍夫方程的积分解
§7.3　δ-函数在地球物理正演模拟问题中的应用
§7.4　地球物理反演问题中δ-函数的应用
7.4.1　一维声波方程的波恩（Born）反演
7.4.2　三维声波方程的波恩（Born）反演
7.4.3　基尔霍夫积分偏移与频率-波数域偏移法（F-K）等价性的证明
7.4.4　拉冬（Rodon）变换
§7.5　δ-函数在地球物理勘探数据处理中的应用
7.5.1　系统特性的描述
7.5.2　数字滤波褶积公式的证明
7.5.3　δ-函数在脉冲反褶积中的应用
7.5.4　提高信号信噪比的处理方法
7.5.5　信号采样过程的数学描述
7.5.6　求取地层反吸收因子的方法
7.5.7　地震子波的整形处理方法
第八章　δ-函数的其他应用
§8.1　电动力学的基本方程和辐射能量的计算公式
8.1.1　电动力学的基本方程
8.1.2　电子的辐射能量
§8.2　富克尔-普朗克（Fokker-Planck）方程
§8.3　地下水非稳定流中群孔同时抽水的干扰井的计算公式
§8.4　δ-函数在光学衍射中的应用
§8.5　量子力学中粒子动量的平均值

参考文献